УДК 519.853.62

Численный поиск равновесия в многостадийной модели равновесного распределения транспортных потоков

А.А. Лагуновская [1]

[1] Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН

В данной работе мы рассмотрим численный метод поиска равновесия в многостадийной модели транспортных потоков. Обычно матрица корреспонденций $\{d_w\}_{w\in OD}$ является известной в подобных задачах, но мы откажемся от этого условия. Рассмотрим граф транспортной сети: множество пар $w=(i,j)$ - источник-сток OD, x_p – поток по пути p; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w, $P=\bigcup_{w\in OD} P_w$ – множество всех путей; $f_e(x)=\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p$ – поток на ребре e (здесь и далее $x=\{x_p\}$, $f=\Theta x$), где $\delta_{ep}=\begin{cases}1, & e\in p\\ 0, & e\notin p\end{cases}$; $\tau_e(f_e)$ – затраты на ребре e ($\tau_e{}'(f_e)\geq 0$); $G_p(x)=\sum_{e\in E}\tau_e(f_e(x))\delta_{ep}$ – затраты на пути p; $X=\left\{x\geq 0:\ \sum_{p\in P_w}x_p=d_w,\, w\in OD\right\}$ – множество допустимых распределений потоков по путям, где d_w – корреспонденция, отвечающая паре w. Пусть в источнике $i\in O$ производственная функция имеет вид $\sigma_i(f_i)$, где $f_i=\sum_{k:(i,k)=e\in E}f_e=\sum_{j:(i,j)\in OD}d_{ij}$, аналогично для стоков $j\in D$ - функции полезности $\sigma_j(f_j)$, $f_j=\sum_{k:(k,j)=e\in E}f_e=\sum_{i:(i,j)\in OD}d_{ij}$. Все функции считаем выпуклыми. Рассмотрим новый граф с множеством вершин $O\bigcup D$, соединенных теми же ребрами, что и в изначальном графе, и с одним фиктивными источником и стоком. Если существует путь из источника i в сток j в исходном графе, то в новом графе прочертим соответствующее ребро с функцией затрат $T_{ij}(d)$. Проведем фиктивное ребро, соединяющее фиктивный источник с фиктивным стоком, затраты на прохождения которого тождественный ноль, считаем $\sum_{(i,j)\in W}d_{ij}+d_0=\bar{d}$. Предположим, что $\exists\ \Phi(d)$ - выпуклая : $T(d)=\nabla\Phi(d)$. Тогда имеет место ключевая **теорема**:

Популяционная игра $\left\langle \{d_{ij},d_0\geq 0\},\quad \left\{G_{ij}(d)=\sigma_i'(f_i)+T_{ij}(d)+\sigma_j'(f_j),G_0(d)\equiv 0\right\}\right\rangle$ является потенциальной. Равновесие d^* в этой игре всегда существует и находится из решения задачи выпуклой оптимизации

$$d^*\in\arg\min_{d\geq 0}\tilde{\Psi}(d),\qquad \tilde{\Psi}(d=\{d_{ij}\})=\sum_{i\in O}\sigma_i\left(\sum_{j:(i,j)\in OD}d_{ij}\right)+\sum_{j\in D}\sigma_j\left(\sum_{i:(i,j)\in OD}d_{ij}\right)+\Phi(d). \tag{1}$$

Если искать стохастическое равновесие, то функционал в теореме необходимо энтропийно регуляризовать. Пусть известно, чему должны равняться в равновесии следующие суммы:

$$\sum_{j:(i,j)\in OD}d_{ij}=L_i,\ \sum_{i:(i,j)\in OD}d_{ij}=W_j\ \left(\sum_{i\in O}L_i=\sum_{j\in D}W_j=N\right). \tag{2}$$

Дополнительные условия (2) однозначно определяют все неизвестные потенциалы, но вместо задачи выпуклой оптимизации получаем минимаксную задачу, выпуклую по $\{d_{ij}\}\geq 0$ и вогнутую по потенциалам $\{\lambda_i^L,\lambda_j^W\}$:

$$\min_{\substack{\{d_{ij}\}\geq 0\\ \sum_{(i,j)\in W} d_{ij}=N}}\ \max_{\{\lambda_i^L,\lambda_j^W\}}\ [\sum_{j\in D}\lambda_j^W\cdot\left(W_j-\sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}\right)+\ +\sum_{i\in O}\lambda_i^L\cdot\left(\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij}-L_i\right)+\Phi(d)+\gamma\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\ln\left(d_{ij}/N\right)]\ (3)$$

Эта задача всегда имеет притом единственное решение. Задачу (4) также можно переписать следующим образом (считаем, что $\sum_{i=1}^{n}L_i=\sum_{j=1}^{n}W_j=1$)

$$\min_{\substack{\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij}=L_i,\ \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}=W_j\\ \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}=1}}\ \max_{t\geq\bar{t}}\ \left\{\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\ln d_{ij}+\sum_{(i,j)\in OD} c_{ij}(t)d_{ij}+g(t)\right\}=$$

$$=\max_{t\geq\bar{t}}\max_{\lambda,\mu}\ \{\langle\lambda,L\rangle+\langle\mu,W\rangle\}-\ \ln\left(\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(-c_{ij}(t)-1+\lambda_i+\mu_j\right)\right)+g(t)=-\min_{t\geq\bar{t}} f(t),\qquad (4)$$

где $f(t)=\min_{\lambda,\mu}\{\ln\left(\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(-c_{ij}(t)-1+\lambda_i+\mu_j\right)\right)\}\ -\langle\lambda,L\rangle-\langle\mu,W\rangle-g(t)$.

Расчет градиента $\nabla f(t)$ осуществляется по следующей формуле (Демьянова–Данскина–Рубинова) $\nabla f(y)=-\dfrac{\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(-c_{ij}(t)+\lambda_i^*+\mu_j^*\right)\nabla c_{ij}(t)}{\sum_{(i,j)\in OD}\exp\left(-c_{ij}(t)+\lambda_i^*+\mu_j^*\right)}-\nabla g(t)\ =-\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}\left(\lambda^*,\mu^*\right)\nabla c_{ij}(t)-\nabla g(t)$,

где $\left(\lambda^*,\mu^*\right)$ – решение задачи (4). Внутренняя задача максимизации по (λ,μ) в (4) может быть явно решена по μ при фиксированном λ и наоборот. Оператор $(\lambda,\mu)\to\left(\Lambda(\mu),\mathrm{M}(\lambda)\right)$ является сжимающим в метрике Биркгофа–Гильберта ρ, то есть после $N\sim\ln\left(\sigma^{-1}\right)$ итераций метода балансировки можно получить такие $\left(\lambda_N,\mu_N\right)$, что $\rho\left(\left(\lambda_N,\mu_N\right);\left\{\left(\lambda_*(t),\mu_*(t)\right)\right\}\right)\leq\sigma$. На практике наблюдается очень быстрая сходимость [2], то есть можно приближенно решить внутреннюю задачу, найдя в равновесии t. Потоки на ребрах f и путях x в равновесии находятся попутно с вычислением $c_{ij}(t)$ при равновесном t [1].

Литература

1. *Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нестеров Ю.Е, Шпирко С.В.* О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков. - Математическое моделирование. - 2014. - Т. 26:6. - С. 34–70. arXiv:1405.7630
2. *Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Нестеров Ю.Е., Спокойный В.Г., Стецюк П.И., Суворикова А.Л., Чернов А.В.* Поиск равновесий в многостадийныйх транспортных моделях // ЖВМ и МФ. 2016. arXiv:1506.00292