УДК 532.546

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО РАСПЛЫВАНИЯ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД В НАСЫЩЕННЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

К.А. Анохина, Л.В. Матвеев

ИБРАЭ РАН, г. Москва

Эл. Почта: ankristina@yandex.ru

1. Введение

Построение автомодельных решений с помощью метода анализа размерностей оказывается плодотворным подходом в ряде случаев, когда исходная задача может быть в той или иной степени упрощена (идеализирована). Однако получить решение, включая законы скейлинга, с помощью лишь одного только применения анализа размерностей возможно далеко не всегда. Часто оказывается, что хотя задача и имеет автомодельное решение и законы скейлинга, для их получения необходимо привлекать дополнительные физические соображения.

В работе рассмотрена задача расплывания бугра грунтовых вод в среде с поглощением. Показано, что для получения автомодельного решения необходимо введение дополнительного условия (по сравнению с задачей без поглощения), соответствующего конечности скорости фильтрации на фронте бугра. Задача о расплывании бугра грунтовых вод в среде с поглощением для одномерного случая была рассмотрена в [1]. Целью нашей работы было рассмотрение двумерного, аксиально-симметричного случая.

2. Постановка задачи и система уравнений

Рассматривается пласт (рис. 1), состоящий из пористой породы, ограниченный снизу горизонтальной непроницаемой границей (подошвой) и содержащий бугор грунтовых вод. Предполагается, что пористая порода проницаема для течения жидкости, поэтому под влиянием силы тяжести бугор грунтовых вод будет растекаться вдоль непроницаемой подошвы.

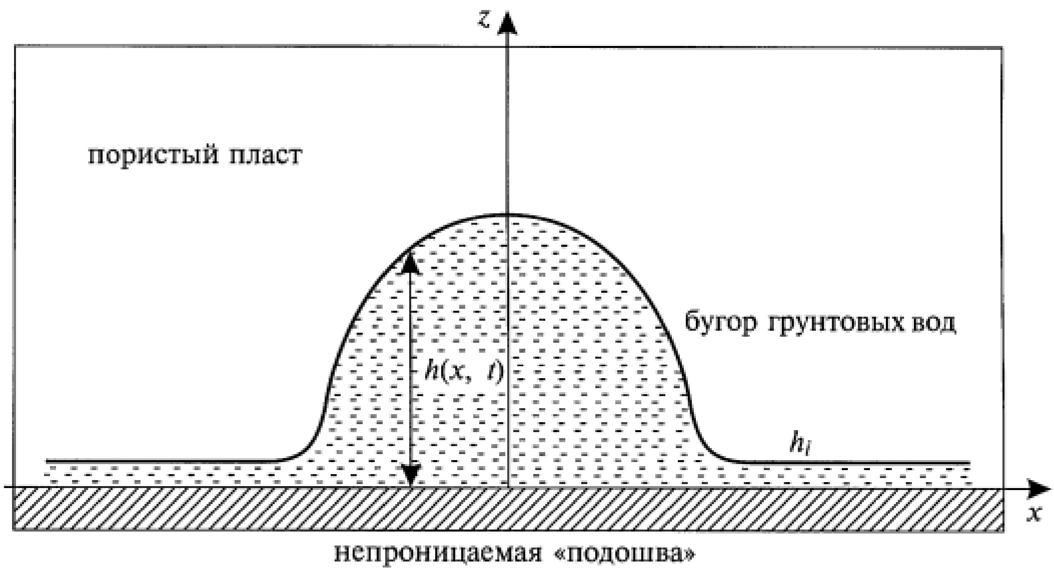

Рисунок 1. Бугор грунтовых вод в пористом пласте

Пологое движение жидкости в пористой среде – медленное, поэтому давление жидкости внутри бугра можно считать распределенным по гидростатическому закону $p = \rho g(h - z)$, где h – уровень грунтовых вод, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести и z – вертикальная координата, отсчитываемая от подошвы пласта. В данном случае мы пренебрегаем давлением газа в пористой среде над бугром. Поэтому напор $H = p + \rho g z = \rho g h$ остается постоянным вдоль каждой вертикали высоты h в бугре грунтовых вод.

Согласно закону Дарси, поток жидкости пропорционален градиенту полного напора:

$$\bar{Q} = -\frac{k}{\mu} h \nabla H = -\frac{k}{2\mu\rho g} \nabla H^2 \tag{1}$$

где k – коэффициент проницаемости пористой среды, а μ – динамическая вязкость жидкости.

Закон сохранения массы при наличии поглощения для двумерного аксиально-симметричного случая выглядит следующим образом:

$$m\partial_t h = -\nabla \bar{Q} + Q' = \frac{k}{2\mu\rho g} \Delta H^2 + Q' \tag{2}$$

где Q' – удельный отток жидкости из порового пространства, т.е. объем жидкости, поглощаемой за единицу времени в единице полного объема среды. Предположим, что величина Q' пропорциональна «материальной» производной объема жидкости между цилиндрическими сечениями радиусов r и $r + dr$ (где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$Q' = \alpha \frac{d(mh)}{dt} = \alpha m(\partial_t h + u\partial_r h) \quad (3)$$

где α – малая постоянная, u – скорость жидкости. Предположим также, что порода пласта обладает трещиноватостью, т.е. в породе существует сеть трещин, разделяющих пористые блоки. Трещины занимают меньшую часть полного объема породы, чем поры, поэтому «трещинная пористость» m_f много меньше, чем пористость блоков m, однако трещины обладают большей шириной, так что жидкость содержится в пористых блоках, но движется между блоками главным образом по трещинам. Поэтому скорость движения жидкости определяется соотношением

$$u = -\frac{1}{m_f}\frac{k}{\mu}\partial_r H \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (2), получим окончательное уравнение для напора:

$$\partial_t H = \kappa(\partial_{rr}^2 H^2 + \frac{1}{r}\partial_r H^2 - 2c(\partial_r H)^2) \quad (5)$$

$$c = \alpha\frac{m}{m_f}, \quad \kappa = \frac{k}{2m\mu} \quad (6)$$

Решение данного уравнения должно удовлетворять граничным условиям

$$H\Big|_{r=+\infty} = 0 \quad (7)$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \quad (8)$$

и начальному условию

$$H(r, \mathrm{t}=0) = H_0(r) \quad (9)$$

Для дальнейшего нам будет также удобно ввести «начальный вес» бугра (на единицу ширины) по формуле: $\int\limits_0^{+\infty} H(r,0)\cdot 2\pi r dr = I$. Если бугор формируется достаточно быстро («мгновенно» по сравнению со временем дальнейшего растекания) в круге радиуса l, данную формулу можно представить в виде:

$$\int\limits_0^{l} H(r,0)\cdot 2\pi r dr = I \quad (10)$$

Заводнение также считается очень интенсивным, так что средний начальный напор жидкости в бугре $I/(\pi l^2)$ велик по сравнению с постоянным начальным напором жидкости в пласте вне бугра H_i .

3. Пространственно-временное распределение напора

Для решения данной задачи был использован метод анализа размерностей. Были выбраны аргументы, от которых может зависеть распределение напора. Помимо координаты r и времени t, в качестве управляющих параметров были рассмотрены начальный вес бугра I, размер области, в которой бугор сосредоточен в начальный момент времени l, константа κ, определяющая свойства среды, константа c, определяющая поглощение, а также H_i - начальный избыточный напор жидкости в пласте вне бугра. Исходя из данного выбора, решение задачи (распределение напора от координат и времени) представляется в общем виде

$$H = f(r,t,I,l,\kappa,H_i,c) \tag{11}$$

где f есть неизвестная функция.

Определим физические размерности введенных величин:

$$[H]=[H_i]=\frac{M}{LT^2}, \quad [t]=T, \quad [I]=\frac{ML}{T^2}, \quad [\kappa]=\frac{L^3T}{M}, \quad [l]=[r]=L. \tag{12}$$

Выберем из управляющих параметров три, имеющих независимые размерности: t, I, и κ. Размерности остальных параметров можно выразить через размерности трех управляющих параметров с независимыми размерностями:

$$[H]=[H_i]=[(I/\kappa t)^{1/2}] \quad [l]=[r]=[(I\kappa t)^{1/4}] \tag{13}$$

Тогда на основе Π - теоремы функциональное соотношение (11) можно представить в виде

$$H=\left(\frac{I}{\kappa t}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{r}{(I\kappa t)^{1/4}},\frac{l}{(I\kappa t)^{1/4}},\frac{H_i}{I^{1/2}(\kappa t)^{-1/2}},c\right) \tag{14}$$

В предположении, что заводнение очень сильное, так что начальный напор вод в пласте пренебрежимо мал и $H_i=0$, а также сосредоточенное, так что можно положить $l=0$, получим:

$$H=\left(\frac{I}{\kappa t}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{r}{(I\kappa t)^{1/4}},0,0,c\right)=\left(\frac{I}{\kappa t}\right)^{1/2}F(\xi,c), \quad \xi=\frac{r}{(I\kappa t)^{1/4}} \tag{15}$$

Соотношения (15) при $c>0$ приводят к противоречию: интегрируя по r исходное уравнение (5) от $r=0$ до $r=r_f$ и используя условие отсутствия потока $H\partial_r H$ на фронте $r=r_f$ (из физических соображений поток непрерывен и равен 0 при $r>r_f$) получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^{r_f}H(r,t)\cdot 2\pi r dr=-2c\kappa\int_0^{r_f}(\partial_r H)^2\cdot 2\pi r dr<0 \tag{16}$$

В то же время в согласии с соотношениями (15) вес бугра грунтовых вод должен быть постоянным:

$$I(t) = \int_0^{r_f} H(r,t) \cdot 2\pi r dr = \int_0^{\xi_f} 2\pi I F(\xi, c) \xi d\xi = const \tag{17}$$

Полученное противоречие показывает, что автомодельное решение уравнения (5) в форме (15) не существует.

Однако при $c = 0$ решение существует и имеет вид

$$H = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \left(\frac{I}{\kappa t}\right)^{1/2} (1 - \frac{r^2}{(32 I \kappa t / \pi)^{1/2}}), 0 \le r \le r_f = \left(\frac{32 I \kappa t}{\pi}\right)^{1/4} \\ 0, r > r_f = \left(\frac{32 I \kappa t}{\pi}\right)^{1/4} \end{cases} \tag{18}$$

Ранее мы положили $l = 0$, без этого предположения решение выглядело бы следующим образом

$$H = \left(\frac{I}{\kappa t}\right)^{1/2} \Phi\left(\xi, \eta, c\right), \quad \xi = \frac{r}{(I\kappa t)^{1/4}}, \quad \eta = \frac{l}{(I\kappa t)^{1/4}} \tag{19}$$

и отсутствие решения при $c > 0$ и $\eta \to 0$ (или $l \to 0$) означает, что функция $\Phi\left(\xi, \eta, c\right)$ при наличии конечного поглощения, т.е. при $c > 0$ не имеет конечного отличного от нуля предела при $\eta \to 0$, в то время как при $c = 0$ предел функции $\Phi\left(\xi, \eta, c\right)$ при $\eta \to 0$ существует и отличен от нуля.

Результаты численных экспериментов, проведенных для различных значений $c > 0$, показали, что функция $\Phi\left(\xi, \eta, c\right)$ имеет степенную асимптотику при $\eta \to 0$, которая также существует и для координаты фронта:

$$\Phi\left(\xi, \eta, c\right) = a_1 \eta^p f(\zeta, c) \tag{20}$$

$$\zeta = \frac{r}{r_f}, \quad r_f(t) = a_2 (I\kappa t)^{1/4} \eta^q \tag{21}$$

Здесь a_1, a_2, p и q - некоторые постоянные, p и q отличны от нуля при $c > 0$.

Подставляя (20) и (21) в решение (19) мы получим при малых η

$$H = A(\kappa t)^{-\lambda} f(\zeta, c), \quad \zeta = \frac{r}{r_f(t)} = \frac{r}{B(\kappa t)^{\mu}} \tag{22}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{p}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4} - \frac{q}{4}, \tag{23}$$

$$A = a_1 I^{1/2 - p/4} l^p, \quad B = a_2 I^{1/4 - q/4} l^q \tag{24}$$

Подставляя (22) в основное уравнение (5) для напора грунтовых вод, получим:

$$\frac{2A}{B^2(\kappa t)^{\lambda+2\mu-1}}\left[(f'_\zeta)^2(1-c)+\frac{f}{\zeta}(f'_\zeta+f''_{\zeta\zeta}\zeta)\right]+\lambda f+\mu\zeta f'_\zeta=0 \tag{25}$$

Функция $f(\zeta,c)$ не должна зависеть от времени явно, только через переменную ζ, поэтому показатель степени времени $\lambda+2\mu-1$ равен нулю, так что $\lambda=1-2\mu$. Положив $A=B^2\mu$, приходим к окончательному уравнению

$$2\left[(f'_\zeta)^2(1-c)+\frac{f}{\zeta}(f'_\zeta+f''_{\zeta\zeta}\zeta)\right]+\frac{1-2\mu}{\mu}f+\mu\zeta f'_\zeta=0 \tag{26}$$

где функция $f(\zeta,c)$ удовлетворяет граничным условиям симметричности и непрерывности решения на фронте

$$f'_{\zeta=0}=0 \text{ и } f(1,c)=0\,. \tag{27}$$

Показатель μ изначально неизвестен и должен быть определен в ходе решения. Для определения этого показателя используется дополнительное условие конечности скорости фильтрации на фронте, которое приводит к следующему граничному условию для функции $f(\zeta,c)$:

$$f'_{\zeta=1}=-\frac{1}{2(1-c)} \tag{28}$$

Окончательное решение уравнения (26) имеет вид

$$f(\zeta,c)=\frac{1}{4(1-c)}(1-\zeta^2),\quad \mu=\frac{1}{2}\frac{1-c}{2-c} \tag{29}$$

а искомое выражение для напора:

$$H=\begin{cases}\dfrac{B^2}{8(2-c)(\kappa t)^{\frac{1}{2-c}}}\left(1-\dfrac{r^2}{r_f{}^2}\right), 0\le r\le r_f=B(\kappa t)^{\frac{1}{2}\frac{1-c}{2-c}}\\ 0, r>r_f=B(\kappa t)^{\frac{1}{2}\frac{1-c}{2-c}}\end{cases} \tag{30}$$

$$B=\xi_f\left(Il^{\frac{2c}{1-c}}\right)^{\frac{1}{2}\frac{1-c}{2-c}} \tag{31}$$

Данное решение является промежуточной асимптотикой и справедливо на временах, когда линейные размеры бугра велики по сравнению с первоначальной протяженностью бугра l, но в то же время начальный напор жидкости в пласте H_i остается пренебрежимо малым по сравнению с напором в бугре. Оценка для этих времен имеет вид:

$$\frac{l^{\frac{4-4c}{1-c}}}{I\kappa} << t << \frac{I^{1-c} l^{2c}}{\kappa H_i^{2-c}} \qquad (32)$$

4. Заключение

В рамках развитой модели для двумерной аксиально-симметричной постановки задачи расплывания бугра грунтовых вод и модели поглощения, определяемой формулой (3), было получено автомодельное решение для формы бугра, имеющее следующий вид:

$$H = H_0(t) f\left(\frac{R}{R_f(t)}\right) \qquad (33)$$

$$H_0(t) \sim t^{\frac{1}{2-c}} \qquad (34)$$

$$R_f(t) \sim t^{\frac{1}{2}\frac{1-c}{2-c}} \qquad (35)$$

где c - константа поглощения, зависящая от свойств среды. При этом было получено, что для напора в бугре имеет место автомодельность второго рода по параметру, содержащему начальную протяженность бугра:

$$H_0(t) \sim l^{\frac{2c}{2-c}} \qquad (36)$$

Также были получены оценки интервала времени, на котором приближения модели справедливы:

$$\frac{l^{\frac{4-4c}{1-c}}}{I\kappa} << t << \frac{I^{1-c} l^{2c}}{\kappa H_i^{2-c}} \qquad (37)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г.И. Баренблатт*, Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг, *Долгопрудный, Издательский Дом «Интеллект», 2009, - 216 с.*