УДК 004.94

Анализ оптимизированного консервативного проекционного метода для решения кинетического уравнения Больцмана.

Лукащук А.Ю.[1], Черемисин Ф.Г.[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. Дороницына РАН

В работе исследуется оптимизированный метод счета интеграла столкновений. Рассматривается задача релаксации пространственно-однородного неравновесного состояния газа. Тестируется релаксация двугорбого распределения, где варьируется расстояние между горбами. Сравниваются результаты и делаются выводы о зависимости ускорения оптимизированного консервативного проекционного метода от расстояния между горбами.

В работе[1] говорится об идее оптимизации консервативного интерполяционного метода без потери в точности. Суть её заключается в следующем: при отсутствии пространственной адвекции уравнение Больцмана выглядит следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = I(f).$$

Эту задачу предлагается решить двумя способами: Проекционно-Интерполяционным методом (PIM)

$$I_\gamma = \frac{a}{2N_\nu}\sum_{\nu=1}^{N_\nu}[-(\delta_{\gamma,\alpha_\nu}+\delta_{\gamma,\beta_\nu})+(1-r_\nu)(\delta_{\gamma,\lambda_\nu}+\delta_{\gamma,\mu_\nu})+r_\nu(\delta_{\gamma,\lambda_\nu+s_\nu}+\delta_{\gamma,\mu_\nu+s_\nu})]\Delta_\nu^*$$

$$\Delta_\nu^* = (f_{a_\nu} f_{\beta_\nu} - f'_{a_\nu} f'_{\beta_\nu})\,\mathrm{g}_\nu$$

$$f'_{a_\nu} f'_{\beta_\nu} = (f_{\lambda_\nu} f_{\mu_\nu})^{1-r_\nu}(f_{\lambda_\nu+s_\nu} f_{\mu_\nu-s_\nu})$$

(В [2] было показано, что для этого метода выполняется Н-теорема Больцмана)

и Симметричным Проекционным методом (SIM)

$$I_\gamma = \frac{a}{2N_\nu}\sum_{\nu=1}^{N_\nu}\begin{matrix}\{(\delta_{\gamma,\alpha_\nu}+\delta_{\gamma,\beta_\nu})[(1-r_\nu^*)\Delta_\nu^{(1)}+r_\nu^*\Delta_\nu^{(2)}-\Delta_\nu^{(0)}]+(\delta_{\gamma,\lambda_\nu}+\delta_{\gamma,\mu_\nu})* \\ *[(1-r_\nu)\Delta_\nu^{(0)}-(1-r_\nu^*)\Delta_\nu^{(1)}]+(\delta_{\gamma,\lambda_\nu+s_\nu}+\delta_{\gamma,\mu_\nu+s_\nu})[r_\nu)\Delta_\nu^{(0)}-r_\nu^*\Delta_\nu^{(2)}]\}\,\mathrm{g}_\nu\end{matrix}$$

$$r_\nu^* = r_\nu\Delta_\nu^{(1)}/[r_\nu\Delta_\nu^{(1)}-(1-r_\nu)\Delta_\nu^{(2)}],\ \Delta_\nu^{(1)} = f_{\lambda_\nu} f_{\mu_\nu},\ \Delta_\nu^{(2)} = f_{\lambda_\nu+s_\nu} f_{\mu_\nu-s_\nu},\ \Delta_\nu^{(0)} = f_{a_\nu} f_{\beta_\nu}$$

Свойства SIM даны в [3].

Была предложена оптимизация для Проекционно-Интерполяционного метода (PIM). Предлагается пересчитывать отрицательные вклады (такие вклады, где функция распределения становится отрицательной) через формулу для Симметричного Проекционного метода (SIM).

Ускорение оптимизированного метода по отношению к прямому счёту сравнивается для различных функций распределения вида:

$$f(t=0) = (\exp[-(\xi_x - a)^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2] + \exp[-(\xi_x + a)^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2]),$$

где a принимает значения: 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2. Расстояние между горбами может служить мерой отклонения газа от состояния термодинамического равновесия.

Параметры дискретизации: N_v = 100000, Vcut = 8 (скорость обрезания), m = 32 (диаметр скоростной сетки). В качестве критерия точности полагается $\tau_{tol} = N_{reg}/ N_v < 10^{-5}$, где N_{reg} – количество столкновений, таких что их вклад в функцию распределения делает её отрицательной в каком-либо узле. В данном случае допускался один отрицательный вклад, который отбрасывался.

a	τ оптим.	τ прямой	ускорение, раз
0,1	0,02	0,0023	8
0,5	0,02	0,0021	9
1	0,02	0,002	10
1,5	0,02	0,0008	25
2	0,015	0,0003	50

На графиках по оси абсцисс отложено время в единицах свободного пробега. На рис. 3 величина относительной флуктуации не превышает 0,2 %.

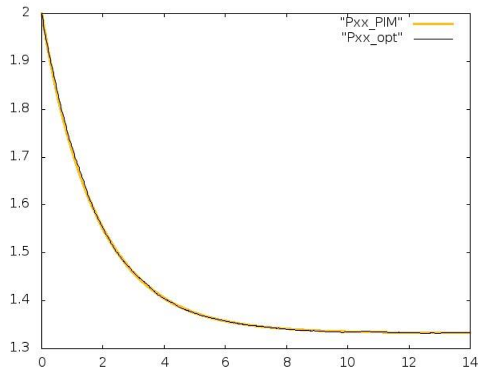

Рис. 1. Эволюция компоненты момента Pxx

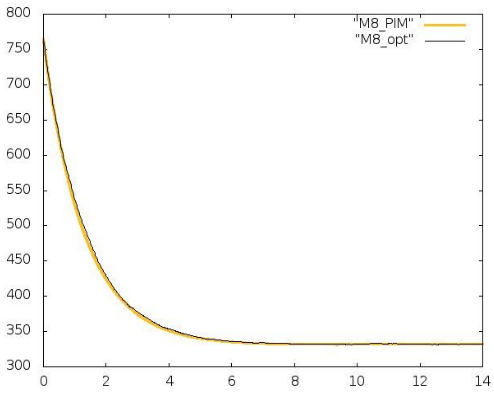

Рис. 2. Эволюция компоненты момента M8

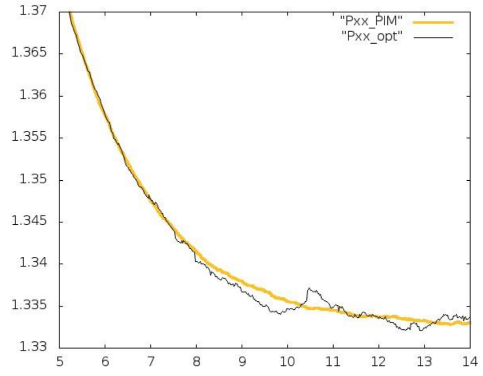

Рис. 3. Эволюция Pxx в равновесном состоянии

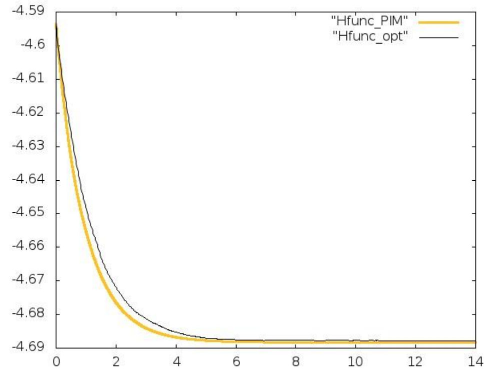

Рис. 4. Эволюция H-функции

Таким образом, можно сделать вывод о значительном ускорении счета при больших расстояниях между горбами, но и для малых расстояний ускорение довольно существенно.

Литература.

1. F.G. Tcheremissine, AIP Conference Proceedings 1648, 230005 (2015); doi: 10.1063/1.4912497

2. O.I. Dodulad and F.G. Tcheremissine, Comp.Math.Math.Phys.53,827-844 (2013)

3. F.G. Tcheremissine, Comp.Math.Math.Phys.46,315-329 (2006)