Когда не выполнен k-закон нуля или единицы? [1]

М.Е. Жуковский[2], А.Е. Медведева

1 Введение.

В данной работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1]$. А именно, ищутся наибольшие значения α, меньшие 1, при которых случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется так называемому k-закону нуля или единицы.

Перед тем как сформулировать результаты работы, дадим основные определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, ..., n\}$. *Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи* (см. [1], [2]) — это случайный элемент $G(n, p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$ на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}, \qquad G \in \Omega_n.$$

Будем считать, что все случайные графы заданы на одном и том же пространстве с вероятностной мерой P.

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы* для класса свойств $\mathcal{C}$, если вероятность выполнения каждого свойства из этого класса стремится либо к 0, либо к 1. Рассмотрим класс $\mathcal{L}_k$ свойств, выражаемых формулами первого порядка с кванторной глубиной, ограниченной сверху числом k (см. [3]). Если случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_k$, то мы говорим, что он *подчиняется k-закону нуля или единицы* (см. [2], [4]—[7]). В случае класса $\mathcal{L}$ всех свойств графов, выразимых на языке первого порядка, мы просто говорим о *законе нуля и единицы* (см. [1], [2], [8]—[10]).

Изучение законов нуля и единицы для случайных графов было начато в 1969 году Ю.В. Глебским, Д.И. Коганом, М.И. Лиогоньким и В.А. Талановым. Они установили (а позже и независимо Р. Фагин в 1976 г.), что закон нуля и единицы воплняется, если $\min\{p, 1-p\}n^{\alpha} \to \infty$ для любого $\alpha > 0$ (см. [9], [10]). В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шела распространили этот закон на $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ (см. [8]). Более того, они доказали, что при любом рациональном $\alpha \in (0, 1]$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00612 и грант № 15-01-03530) и гранта Президента РФ МК-2184.2014.1.

[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), факультет инноваций и высоких технологий, кафедра дискретной математики

закону нуля или единицы не подчиняется. В 2011 году М.Е. Жуковский доказал, что при $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k-2))$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Но при этом если $\alpha = 1/(k-2)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы (см. [4], [5]). Что касается значений α, близких к единице, то установлено, что при $k \geq 4$ в точках вида $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+\beta}$, где β — рациональная дробь с числителем, превосходящим 2^{k-1}, k-закон нуля и единицы выполняется, если же β — неотрицательное целое число, не большее $2^{k-1} - 2$, то k-закон нуля и единицы не выполняется (см. [6]). Наконец, в работе [7] доказано, что при $\beta \in \{2^{k-1} - 1, 2^{k-1}\}$ выполнен k-закон.

Из приведенных выше результатов следует, что остается открытым вопрос, подчиняется ли случайный граф k-закону нуля и единицы при $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+a/b}$, где $a, b \in \mathbb{N}, a \leq 2^{k-1}, b \geq 2$. В данной работе дается ответ при $a \in \{1, \ldots, 2^{k-1} - (b+1)^2\}$ (разумеется, $b \leq \sqrt{2^{k-1} - 1} - 1$) и $k \geq 5$.

Теорема 1. *Пусть $k \geq 5$, $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+a/b}$, где $a \in \{1, 2, ..., 2^{k-1} - (b+1)^2\}$. Тогда граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля и единицы.*

Из сформулированный теоремы следует, что при $b = 2$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону при всех $a \in \{1, 2, \ldots, 2^{k-1} - 9\}$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, мы в разделе 2 определим необходимые инструменты и расскажем о распределении малых подграфов в случайном графе, а затем в разделе 3 докажем теорему.

2 Распределение малых подграфов.

Введем ряд обозначений, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть X — произвольный граф, x, y — две его вершины. Тогда обозначим $\mathrm{dist}_X(x, y)$ наименьшую длину пути в X, соединяющего вершины x и y. *Длиной* пути мы называем количество ребер в нем. В случае $x = y$ положим $\mathrm{dist}_X(x, y) = 0$. Для произвольного графа G обозначим $v(G)$ число его вершин, $e(G)$ — число его ребер, $a(G)$ — число его автоморфизмов. *Плотность* графа $\frac{e(G)}{v(G)}$ обозначим $\rho(G)$.

Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G *строго сбалансированный*, если для любого собственного подграфа $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теорему (см. [1], [2], [11]) о количестве копий графа G в случайном графе $G(n, p)$. Положим $\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}$.

Теорема 2 ([11])**.** *Пусть G — произвольный граф. Если $p = o\left(n^{-1/\rho^{\max}(G)}\right)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \supset G) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \supset G) = 1.$$

Пусть теперь G *— строго сбалансированный граф. Если* $p = n^{-1/\rho(G)}$,*то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \supset G) = 1 - e^{-1/a(G)}.$$

С помощью этой теоремы, например, легко показать, что при $\alpha = 2/3$ не выполняется 4-закон нуля и единицы. Рассмотрим граф K_4: он строго сбалансированный, его плотность $3/2 = 1/\alpha$. Очевидно, что свойство графа содержать K_4 можно записать формулой первого порядка с кванторной глубиной 4. По теореме 2 выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-2/3}) \supset K_4) = 1 - e^{-1/24}$. Таким образом, случайный граф $G(n, n^{-2/3})$ не подчиняется 4-закону нуля и единицы.

3 Доказательство теоремы.

Пусть $\tilde{\Omega}_n$ — множество графов из Ω_n, которые не содержат ни одного подграфа H с $v(H) \leq 2(b+2)2^{k-2}$, $\rho(H) > 1/\alpha$.

Докажем вспомогательную лемму. Будем обозначать за $\lceil t \rceil$, $t \in \mathbb{R}$, ближайшее к t целое число, не меньшее t. За $\lfloor t \rfloor$, $t \in \mathbb{R}$, будем обозначать ближайшее к t целое число, не большее t.

Лемма 1. *Свойство* $\mathrm{dist}_G(v_1, v_2) = i$ *вершин* v_1 *и* v_2 *графа* G *можно записать формулой с кванторной глубиной* $\lceil \log_2 i \rceil$.

Доказательство. Свойство $\mathrm{dist}_G(v_1, v_2) = i$ можно записать с помощью следующей формулы:

$$D_i(v_1, v_2) := \left(P_i(v_1, v_2) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} (\neg P_j(v_1, v_2)) \right) \right),$$

где $P_j(v_1, v_2)$ — формула (которую мы определим ниже), выражающая свойство графа содержать путь длины j между v_1 и v_2. Так как кванторная глубина $D_i(v_1, v_2)$ равна максимальной из кванторной глубин $P_j(v_1, v_2)$, $j \in \{1, \ldots, i\}$, достаточно показать, что формула $P_i(v_1, v_2)$ имеет кванторную глубину $\lceil \log_2 i \rceil$.

Докажем индукцией по i.

При $i = 1$ формула $P_1(v_1, v_2) := (v_1 \sim v_2)$ имеет кванторную глубину 0.

Пусть предположение справедливо для $i - 1$. Докажем для i :

$$P_i(v_1, v_2) := [\exists x \ (\underbrace{P_{\lceil i/2 \rceil}(v_1, x)}_{\lceil \log_2 \lceil i/2 \rceil \rceil} \wedge \underbrace{P_{\lfloor i/2 \rfloor}(v_2, x)}_{\lceil \log_2 \lfloor i/2 \rfloor \rceil})].$$

Получаем, что кванторная глубина $P_i(v_1, v_2)$ равна $1 + \lceil \log_2 \lceil i/2 \rceil \rceil = \lceil \log_2 i \rceil$, что и требовалось доказать.

Введем еще несколько определений и обозначений.

Пусть $s, l \in \mathbb{N}$. Будем называть граф G *арканом с параметрами* (s, l), если $G = L \cup C$, где L — простой путь длины s между некоторыми вершинами v и u графа G, C — простой цикл длины l, проходящий через вершину u, и $V(C) \cap V(L) = \{u\}$.

Будем называть граф $G = (V, E)$ *двухпроходным графом, проходящим через вершину* v_1, если выполнено:

- $G = L_1 \cup L_2$, где L_1, L_2 — простые пути от вершины v_1 до вершины $v_2 \in V(G)$, при этом $e(L_1) = e(L_2) - 1$;
- для некоторых вершин r_1, r_2 графа G справедливо $G = L^1 \cup C \cup L^2$, где L^1 — простой путь от вершины v_1 до вершины r_1, L^2 — простой путь от вершины r_2 до вершины v_2, C — простой цикл, $V(L^1) \cap V(C) = \{r_1\}$, $V(C) \cap V(L^2) = \{r_2\}$, $V(L^1) \cap V(L^2) = \varnothing$, $L_1 \cap L_2 = L^1 \cup L^2$.

Длина двухпроходного графа — величина, равная $e(L_1) + e(L_2)$.

Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$.

Пусть $C_{2m+1}(v_1)$, $m \in \{1, \ldots, 2^{k-3} - 1\}$, — формула, выражающая свойство графа $\mathcal{G}$ содержать двухпроходный граф длины $2m+1$, проходящий через вершину v_1. Ее можно определить следующим образом: $C_{2m+1}(v_1) = (\exists v_2\ (\tilde{C}_{2m+1}(v_1, v_2) \vee \tilde{C}_{2m+1}(v_2, v_1)))$, где

$$\tilde{C}_{2i+1}(v_1, v_2) = \Bigg(D_i(v_1, v_2) \wedge \Bigg[\exists z\ \bigg(\Big(D_{\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}(v_1, z) \wedge D_{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}(z, v_2)\Big) \vee$$

$$\Big(D_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}(v_1, z) \wedge \tilde{C}_{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1}(z, v_2)\Big)\bigg)\Bigg]\Bigg), \quad i \geq 2,$$

$$\tilde{C}_3(v_1, v_2) = ([v_1 \sim v_2] \wedge [\exists z\ ((v_1 \sim z) \wedge (z \sim v_2))]).$$

Для произвольной формулы P будем обозначать $\mathrm{D}(P)$ кванторную глубину P. Очевидно, при $i \geq 2$ имеем

$$\mathrm{D}(\tilde{C}_{2i+1}(v_1, v_2)) = \max\Big\{\lceil \log_2 i \rceil, \lceil \log_2(i+1) \rceil, 1 + \mathrm{D}((\tilde{C}_{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1}(v_1, v_2)))\Big\} = \lceil \log_2(i+1) \rceil.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}(C_{2m+1}(v_1)) = 1 + \lceil \log_2(m+1) \rceil. \quad (1)$$

Формула $C_{2m+1}(v_1)$ выражает свойство существования двух различных простых путей от вершины v_1 до вершины v_2 длин m и $m+1$. Обозначим объединение таких путей G и докажем, что в связном графе G количество ребер не превосходит количества вершин. Предположим противное. Тогда плотность графа G не меньше, чем

$$\frac{2m+1}{2m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2m+1}} \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-2}-1}} > \frac{1}{\alpha}.$$

При этом $v(G) \le 2m+1 \le 2^{k-2}-1$. Получили противоречие с определением множества $\tilde{\Omega}_n$. Следовательно, истинность формулы $C_{2m+1}(v_1)$ для графа $\mathcal{G}$ влечет существование в графе $\mathcal{G}$ двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину v_1. Если граф $\mathcal{G}$ содержит двухпроходной граф G длины $2m+1$, проходящий через вершину v_1, а формула $C_{2m+1}(v_1)$ не является истинной, то в $\mathcal{G}$ существует такой подграф $\tilde{G} \supset G$, что $v(\tilde{G}) - v(G) < m$, $e(\tilde{G}) > v(\tilde{G})$. Следовательно,

$$\rho(\tilde{G}) = 1 + \frac{e(\tilde{G}) - v(\tilde{G})}{v(\tilde{G})} \ge 1 + \frac{1}{3m} \ge 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{k-3} - 3} > \frac{1}{\alpha}.$$

При этом $v(\tilde{G}) < 3m \le 3 \cdot 2^{k-3} - 3$. Получили противоречие. Таким образом, истинность формулы $C_{2m+1}(v_1)$ для графа $\mathcal{G}$ и существование в графе $\mathcal{G}$ двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину v_1, эквивалентны.

Определим формулу $T^p_{2m+1}(v_1)$, $m \in \{1, \ldots, 2^{k-3}-1\}$, $p \in \mathbb{N}$, выражающую свойство графа содержать двухпроходный граф длины $2m+1$, который проходит через некоторую вершину v_2, находящуюся на расстоянии p от v_1, при этом не существует двухпроходного графа длины не более $2m-1$, проходящего через вершину, находящуюся на расстоянии менее p от вершины v_1. Не существует, кроме того, и двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину, находящуюся на расстоянии $p-1$ от вершины v_1 (и, следовательно, через вершину v_2 не проходит двухпроходных графов длины, меньшей $2m+1$, из чего, в свою очередь, следует, что существующий двухпроходный граф длины $2m+1$ является арканом). Запишем ее:

$$T^p_{2m+1}(v_1) = \left(\tilde{T}^p_{2m+1}(v_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m-1} \bigwedge_{s=1}^{p-1} \left(\neg \tilde{T}^s_{2i+1}(v_1) \right) \right) \wedge \left(\neg \tilde{T}^{p-1}_{2m+1}(v_1) \right) \right),$$

где

$$\tilde{T}^p_{2m+1}(v_1) = \left(\exists v_2 \left(D_p(v_1, v_2) \wedge C_{2m+1}(v_2) \right) \right).$$

Заметим, что если для некоторой вершины v_1 графа $\mathcal{G}$ и некоторых $m \le 2^{k-3}-1$, $p \le 2^{k-2}$ истинна формула $T^p_{2m+1}(v_1)$, то граф $\mathcal{G}$ содержит вершину v_2, находящуюся на расстоянии p от вершины v_1, путь L длины p от вершины v_1 до вершины v_2 и двухпроходный граф D длины $2m+1$, проходящий через вершину v_2, являющийся арканом и пересекающий L только по вершине v_2 (иначе граф $L \cup D$ содержал бы более одного простого цикла и тогда его плотность превосходила бы $1/\alpha$, что противоречило бы определению множества $\tilde{\Omega}_n$).

Положим $a = 2^{k-1} - (b+1)^2 - 2(b+1)\xi - 2\eta - \delta$, где ξ, η — целые неотрицательные числа, причем $\eta < b+1$. Кроме того, $\delta = 0$, если $a+b$ — нечетное число, и $\delta = 1$, если $a+b$ — четное число. Обозначим $m = 2^{k-3} - \xi - 1$. Имеем

$$2(b+1)m \ge 2^{k-2}(b-1) + (b+1)^2 + 2\eta - 2(b+1) = 2^{k-2}(b-1) + b^2 + 2\eta - 1 > 0.$$

Поэтому $m \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$\frac{b}{1-\alpha} = b \cdot 2^{k-1} + a = (b+1)2^{k-2} + (b+1)(2m+1) - (b+1)^2 + (b+1-2\eta) - \delta.$$

Очевидно, найдутся такие $b+1$ чисел $p_1 > \ldots > p_{b+1}$ из $0, 2, \ldots, 2(b+1)$, что

$$p_1 + \ldots + p_{b+1} = (b+1)^2 - (b+1-2\eta).$$

Следовательно, $b \cdot 2^{k-1} + a = (b+1)2^{k-2} + (2m+1)(b+1) - (p_1 + \ldots + p_{b+1}) - \delta$. Переобозначим $p_1 := p_1 + \delta$.

Запишем основную формулу:

$$Tr = \left(\exists v_1 \ \left(T_{2m+1}^{2^{k-2}-p_1}(v_1) \wedge T_{2m+1}^{2^{k-2}-p_2}(v_1) \wedge \ldots \wedge T_{2m+1}^{2^{k-2}-p_{b+1}}(v_1)\right)\right).$$

Используя лемму 1 и равенство (1) , посчитаем кванторную глубину формулы Tr: $\mathrm{D}(Tr)$ не превосходит величины

$$1 + \mathrm{D}\left(T_{2m+1}^{2^{k-2}-p_{b+1}}(v_1)\right) \leq \max\{k, 2 + \mathrm{D}(C_{2m+1}(v_2))\} = \max\{k, 3 + \lceil \log_2(m+1) \rceil\} \leq k.$$

Пусть граф $\mathcal{G}$ содержит подграф $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{b+1}$, где $F_1, F_2, \ldots, F_{b+1}$ есть арканы с параметрами $(2^{k-2} - p_1, 2m+1)$, $(2^{k-2} - p_2, 2m+1)$, $\ldots$, $(2^{k-2} - p_{b+1}, 2m+1)$ соответственно, при этом в каждом из множеств $V(F_i \cap F_j)$, $i \neq j \in \{1, \ldots, b+1\}$, лежит единственая вершина v, которая также является единственной вершиной степени 1 графов $F_1, F_2, \ldots, F_{b+1}$. Легко заметить, что граф F является строго сбалансированным и $\rho(F) = 1/\alpha$. Тогда формула Tr, очевидно, истинна. Действительно, в противном случае в графе $\mathcal{G}$ нашелся бы такой подграф $\tilde{F} \supset F$, что $v(\tilde{F}) - v(F) < 2^{k-1}$ и $e(\tilde{F}) - e(F) > v(\tilde{F}) - v(F)$, но тогда $v(\tilde{F}) < 2(b+2)2^{k-2}$ и $\rho(\tilde{F}) > 1/\alpha$, что противоречит определению множества $\tilde{\Omega}_n$.

Пусть теперь для графа $\mathcal{G}$ формула Tr истинна. Так как $m = 2^{k-3} - \xi - 1 \leq 2^{k-3} - 1$, то $\mathcal{G}$ содержит подграф $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{b+1}$, где $H_1, H_2, \ldots, H_{b+1}$ есть объединения простых путей $L_1, L_2, \ldots, L_{b+1}$ длин $2^{k-2} - p_1, \ldots, 2^{k-2} - p_{b+1}$ соответственно, одной из концевых вершин каждой из которых является некоторая вершина v_1, и двухпроходных графов $D_1, D_2, \ldots, D_{b+1}$ на $2m+1$ вершинах, являющихся арканами и проходящих через вторые концевые вершины $v_2^1, \ldots, v_2^{b+1}$ путей $L_1, L_2, \ldots, L_{b+1}$ соответственно. Более того, для каждой вершины v_2^i, $i \in \{1, \ldots, b+1\}$, не существует двухпроходного графа, проходящего через нее и имеющего длину, меньшую $2m+1$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, b+1\}$ пересечение пути L_i и аркана D_i состоит из одной вершины, а также через вершину v_3^i, соединенной в пути L_i с вершиной v_2^i, не проходит двухпроходный граф длины $2m+1$.

Предположим, что для некоторого $i \in \{2, \ldots, b+1\}$ выполнено $v_3^i \in V(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1})$. Напомним, что $\mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(v_1, v_3^i) = 2^{k-2} - p_i - 1$ и числа $e(L_1), \ldots, e(L_i)$ упорядочены по возрастанию и отличаются не менее чем на 2. В силу предположения для некоторого $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ вершина v_3^i принадлежит графу H_j. Предположим, что она не принадлежит графу D_j. Тогда она находится от v_1 на расстоянии менее $2^{k-2} - p_i - 1$. Получили противоречие с определением вершины v_3^i. Следовательно, $v_3^i \in V(D_j)$. Но D_j — двухпроходный граф длины $2m+1$, а через любую вершину двухпроходного графа проходит двухпроходный граф не большей длины, что противоречит истинности формулы $T_{2m+1}^{2^{k-2}-p_i}$. Следовательно, $v_3^i \notin V(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1})$.

Так как для любого $i \in \{2, \ldots, b+1\}$ вершина v_1 принадлежит пересечению графов $H_1 \cup H_2 \ldots \cup H_{i-1}$ и H_i, то $v((H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \cap H_i) > e((H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \cap H_i)$, а, следовательно, величина $u_i := v(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_i) - v(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1})$ меньше величины $e_i := e(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_i) - e(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1})$. Обозначим $u_1 = v(H_1)$, $e_1 = e(H_1)$. Тогда

$$\rho(H) = \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_{b+1}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{b+1}} = 1 + \frac{e_1 - u_1 + e_2 - u_2 + \ldots + e_{b+1} - u_{b+1}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{b+1}} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{b}{(b+1)2^{k-2} + (b+1)(2m+1) - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{b+1})} = \frac{1}{\alpha}.$$

Так как $v(H) \leq 2(b+1) \cdot 2^{k-2}$, то $\rho^{\max}(H) \leq 1/\alpha$. Следовательно, $u_i = 2^{k-2} - p_i + 2m + 1$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, b+1\}$. Последнее верно тогда и только тогда, когда графы H и F изоморфны.

Пусть L_n — множество графов в Ω_n, для которых истинна формула Tr. Тогда

$$\mathsf{P}(G(n,p) \supset F) \leq \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n) = \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n,\, G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n) +$$

$$+ \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n,\, G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n) \leq \mathsf{P}(G(n,p) \supset F) + \mathsf{P}(G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n).$$

По теореме 2 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \supset F) = 1 - e^{-1/a(F)}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n) = 1 - e^{-1/a(F)}.$$

Поэтому k-закон нуля и единицы не выполнен. Теорема доказана.

Список литературы

[1] S. Janson, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random Graphs*, New York, Wiley, 2000.

[2] М.Е. Жуковский, А.М. Райгородский, *Случайные графы: модели и предельные характеристики*, Успехи математических наук, **70**(1): 35–88, 2015.

[3] Н.К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, Москва, МЦНМО, 2000.

[4] М.Е. Жуковский, *Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной*, Доклады Академии Наук, **436(1)**: 14–18, 2011.

[5] M.E. Zhukovskii, *Zero-one k-law*, Discrete Mathematics, **312**: 1670–1688, 2012.

[6] М.Е. Жуковский, *Расширение k-закона нуля или единицы*, Доклады Академии Наук, **454**(1): 23–26, 2014.

[7] М.Е. Жуковский, *О наибольшей критической точке в k-законе нуля или единицы*, Математический сборник, 206:4 (2015), 13–34.

[8] S. Shelah, J.H. Spencer, *Zero-one laws for sparse random graphs*, J. Amer. Math. Soc., **1**:97–115, 1988.

[9] Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький, В.А. Таланов, *Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов*, Кибернетика, 1969, **2**: 17-26.

[10] R. Fagin, *Probabilities in finite models*, J.Symbolic Logic, 1976, **41**: 50-58.

[11] B. Bollobás, *Threshold functions for small subgraphs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **90**: 197–206, 1981.