УДК 519.179.1

Закон нуля или единицы для случайных гиперграфов

А.Д. Матушкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Говорят, что случайный s-однородный гиперграф (или просто s-гиперграф) $H_s(n,p(n))$ *подчиняется закону нуля или единицы,* если для любого свойства первого порядка вероятность выполнения этого свойства стремится к 0 или к 1. В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шела (см. [1]) установили, что при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,\infty)\backslash\mathbb{Q}$ случайный граф $G(n,p) = H_2(n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы. В той же работе было доказано, что при $\alpha \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$ случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется.

В настоящей работе мы исследуем закон нуля или единицы для случайных гиперграфов. Ранее Н. Салданья и М. Теллеш (см. [2]) доказали, что при $\alpha > s-1$, $\alpha \neq \frac{1+k(s-1)}{s}$ случайный s-гиперграф $H_s(n,n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы, а если $\alpha = \frac{1+k(s-1)}{s}$, $k \in \mathbb{N}$, то $H_s(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы.

Назовем s-гиперграф G строго сбалансированным, если для любого собственного подграфа $H \subset G$ его плотность $\rho = e(H)/v(H)$ строго меньше, чем плотность гиперграфа G. Нами был получен следующий результат о существовании строго сбалансированных графов.

Теорема 1. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $\rho \in \mathbb{Q}$. *Тогда строго сбалансированный* s*-гиперграф с плотностью* ρ *существует тогда и только тогда, когда либо* $\rho \geq 1/(s-1)$, *либо* $\rho = k/(1+k(s-1))$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$.

А.Г. Ванцян доказал (см. [3]), что свойство содержать фиксированный строго сбалансированный s-гиперграф H с плотностью ρ имеет пороговую функцию $p = n^{-1/\rho}$. Поскольку свойство содержать подграф H не обладает точной пороговой вероятностью и является монотонным, то из этой теоремы, а также из теоремы 1 следует, что для любого рационального $\alpha \in (0, s-1]$ случайный s-гиперграф $H_s(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы.

Литература

1. *S. Shelah, J.H. Spencer,* Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. –1988. – N 1. – 97-115pp.
2. *N.C. Sandalha, M. Telles,* Some examples of asymptotic combinatorial behavior, zero-one and convergence results on random hypergraphs // –2015. http://de.arxiv.org/pdf/1411.5290.
3. *A.G. Vantsyan*, The evolution of random uniform hypergraphs // Probabilistic problems in discrete mathematics –1987. 126-131pp.