УДК 519.688

Эффективное моделирование многокомпонентных газовых сред с помощью метода RKDG

А. В. Панин[1], Б. А. Корнеев[1], В. Д. Левченко[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет),

[2]Институт Прикладной Математики им.Келдыша РАН

Введение. Уравнения газовой динамики – одна из основных моделей описания поведения газа и сжимаемой жидкости в рамках сплошной среды. В данной работе рассматривается одномерный случай и используется diffused interface method (DIM), который применяется в квази-консервативной форме для уменьшения потенциальной проблемы колебания давления на границе раздела. В работе строится метод RKDG , являющийся методом повышенного порядка, обладающим TVDM свойством, и имеющий явный шаблон.

Уравнения динамики смеси газов при пренебрежимо малой вязкости имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F_j}}{\partial x_j}=S \quad ,$$

$\mathbf{U}=(\rho,\rho v_i,\rho E_T,\alpha_1)^T$ - вектор переменных, $E=\frac{1}{2}v_i v_i+\epsilon,$ где $\epsilon-$ внутренняя энергия

$\mathbf{F_j}=(\rho v_j,\rho v_i v_j,(\rho E_T+P)v_j,v_j\alpha_1)^T$ - невязкий поток,

$\mathbf{S}=(0,0,0,\alpha_1\frac{\partial v_j}{\partial x_j})^T$ - недивергентные члены

Уравнение состояния должно быть корректно, как в области чистых газов или жидкостей, так и в области смеси. Для этого используется Stiffened gas EOS:

$$\epsilon=\frac{P}{\rho(\gamma-1)}$$ - внутренняя энергия смеси,

$$\frac{1}{\gamma-1}=\sum_k\frac{\alpha_k}{\gamma_k-1},$$

$$P=\frac{\rho\epsilon}{\sum_k\frac{\alpha_k}{\gamma_k-1}}$$ - давление

Построение численной схемы. Будем считать, что решение ищется в ограниченной области $D\in R^1$ на которой задано начальное условие $U_0(\mathrm{x},0),$ а на границе области заданы некие граничные условия $U_\Gamma(x,t)$. Пусть существует нормальное разбиение области D на ячейки. Тогда в произвольной ячейке будем искать решение в виде разложения $\mathbf{U}_j(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = U_{ij}(t)\varphi^j(x), \quad i=\overline{1,...,3},\ j=\overline{1,k},$ где $\{\varphi_i(\vec{\mathrm{r}})\}_{i=1}^k$ - базисные функции, $\mathbf{U}_{ij}(t)$ - набор зависящих только от времени коэффициентов раздлжения. Подставим это разложение в исходную систему и потребуем для невязки условие ортогональности всем базисным функциям, тогда получим для каждой ячейки $L \in D$

$\dot{U}_{ij}(t)\int\limits_L \varphi^j\varphi^k dV + \int\limits_L \nabla_s \mathbb{F}^s(\mathrm{U}_{ij})\varphi^k dV = \int_{L_j} \varphi_j \tilde{\mathbf{S}} dV,$ где $\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{S}}$ - численные потоки через соответствующие границы ячеек, определяемые по своей и соседней грани. Используя формулу Остроградского-Гаусса и формулу дифференцирования произведения, получим

$\dot{U}_{ij}(t)\int\limits_L \varphi^j\varphi^k dV + \int\limits_{L_j} \mathbb{F}^s(\mathrm{U}_{ij})\varphi^k \vec{n}_s dS = \int\limits_L \mathbb{F}^s(\mathrm{U}_{ij})\nabla_s\varphi^k dV + \int_{L_j} \varphi_j \tilde{\mathbf{S}} dV.$ Интегралы вычисляются по квадратурным формулам. Поток на границе $\mathbb{F}^s(\mathrm{U}_{ij})$ заменяется численным потоком, зависящим от значений U слева и справа от грани. В данной работе был использован численный поток HLLC для членов, отвечающих за изменение массы, импульса и энергии. Поток Лакса-Фридрихса был использован для переноса доли объема вещества:

$$\tilde{F}_\alpha(\mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+) = \frac{1}{2}(v^-\alpha^- + v^+\alpha^+ - \frac{1}{2}\min|v^- + v^+|(\alpha^+ - \alpha^-))$$

Тестирование численной схемы. Для апробации метода проводится тестирование метода на серии задач о распаде разрыва для одномерного случая. Исследуются так называемые: 2-phase Sod problem, 2-phase Lax problem. Также исследуется тест Shock-entropy Interaction. Полученные результаты вычислений демонстрируют хорошее разрешение газодинамических разрывов в решениях. Нефизические осцилляции хорошо подавлены. В целом, результаты тестов сравнимы с решениями, полученными другими методами того же порядка.

Список литературы:

1. *Корнеев Б. А., Левченко В. Д.,* Моделирование уравнений газовой динамики разрывным методом Галёркина с помощью алгоритмов LRnLA // Препринты ИПМ (ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2013) - vol. 28 - p. 17

2. *Gryngarten L.D., Menon S.,* Shock-bubble interaction simulations using a new two-phase discontinuous galerkin method - In 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition - no. AIAA-2011-294, Orlando, FL (2011)