УДК 51-72

Применение теории усреднения к моделированию слоистых ползучих сред

А.А. Гавриков[1], А.С. Шамаев[1,2]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Для исследования прочности и разрушения массивов ползучих соляных пород представляет существенный интерес вопрос моделирования значительных пространственных объемов залежей упомянутых сред на длительных интервалах времени, что приводит к необходимости применять либо заведомо упрощенные либо феноменологические модели, допускающие возможность численного решения за приемлемое время. Однако, такой подход не всегда оправдан и может приводить к существенному расхождению результатов моделирования и наблюдений. Но в некоторых случаях, при определенных условиях залегания пород возможно сохранить точность исходных физических моделей, учесть данные эксперимента и при этом сохранить возможность проводить расчеты за приемлемое время.

В частности, в случае слоистой геометрии залежей можно применить теорию усреднения и получить модели, позволяющие комбинировать аналитические преобразования и численные расчеты по достаточно крупным сеткам. В докладе приводится несколько таких подходов, каждый из которых обладает своими преимуществами.

Пусть изучаемый объем состоит из периодических параллельных слоев двух сред (например, соли и глины). Предположим, что поведение каждой из сред в общем виде описывается реологическим соотношением теории наследственности Вольтерра [1]

$$\varepsilon_{ij}(t) = b_{ijkl}\sigma_{kl} + \int_0^t d_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau \qquad (1)$$

где ε_{ij} — тензор деформаций, σ_{kl} — тензор напряжений, b_{ijkl} и d_{ijkl} — полученные из эксперимента обратный к тензору упругих постоянных тензор и линейные по напряжениям ядра ползучести (например, Абелевского типа). Движение среды описывается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f$$

где f — сила тяжести. Пусть также зафиксировано разбиение интервала времени.

1. Используя метод шагов [1] и теорию усреднения [2], можно показать, что вычисление напряжений в момент t_k сведется к численному решению по крупной сетке краевой задачи во всей области типа

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}\right)=F_i \qquad (2)$$

с соответствующими граничными условиями, где A_{ij} — матрицы, соответствующие усредненному упругому тензору, имеющие явное аналитического выражение, а правая часть F_i представляет собой комбинацию явных аналитических выражений и численных значений напряжений, вычисленных на предыдущих шагах. С помощью найденных вспомогательных вектор-функций $\mathbf{v}$ аналитически строятся смещения и напряжения, причем исходные смещения приближаются таким образом в пространстве Соболева H^1 с точностью до $O(\sqrt{\varepsilon})$, где ε — малый параметр, характеризующий малость периода, по отношению ко всему размеру изучаемого объема.

2. Можно также показать, что комбинируя методы теории усреднения [3] и теорию Э-функций Работнова [4] задачу можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(A_0^{hk}+\hat{A}^{hk}(t)\,*\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k}=f(x)$$

к которой напрямую применяется метод шагов [1]. Здесь матрицы A_0^{hk} находятся явно, а матрицы A^{hk} соответствуют анизотропному тензору ползучести, компоненты которого выражаются с помощью Э-функций.

3. В случае, когда ядра ползучести (1) нелинейны по напряжениям (например, Абелевского типа с экспоненциальным множителем), задачу можно свести к рекурсивному решению на каждом шаге задач типа (2), что представляет собой отдельную довольно сложную алгоритмическую задачу. Однако, разбивая исходный массив породы на отдельные участки, возможно перейти к линейной модели (и применить метод 1) на каждом из участков, проверяя на каждом шаге превышение напряжений над некоторым пороговым уровнем, соответствующим дискретизации исходных нелинейных ядер.

Литература

1. *Константинова С.А., Аптуков В.Н.* Некоторые задачи механики деформирования и разрушения соляных пород. – Новосибирск: Наука, 2013. – 191 с.
2. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А, Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. – М.: МГУ, 1990. – 311 с.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. *Orlik J.* Transmission and Homogenization in Hereditary Viscoelasticity with Aging and Shrinkage. – Berlin: Shaker, 2000. – 126 p.