УДК 519.63

Робастные гибридные бикомпактные схемы с пространственной факторизацией

М.Д. Брагин[1], *Б.В. Рогов*[1,2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Недавно для многомерных уравнений гиперболического типа были предложены гибридные бикомпактные схемы [1]. В этих схемах пространственные производные дискретизируются посредством симметричной компактной аппроксимации четвертого порядка. В отличие от других компактных схем, дискретизация выполняется в рамках одной ячейки. Значения решения в промежуточных узлах исключаются за счет привлечения дифференциальных следствий исходных уравнений. Это приводит к понижению разностного порядка уравнений бикомпактных схем до первого, т.е. эти схемы после исключения становятся двухточечными. Для аппроксимации производных по времени применяются диагонально-неявные методы Рунге-Кутты третьего порядка и выше. Решения, получаемые по описанным схемам высокого порядка монотонизируются с использованием методики гибридной схемы.

Идея гибридной схемы была впервые высказана в работе [2]. Новизна гибридной схемы [1] заключается в том, что в качестве аргумента весового множителя выступает разность решения монотонной схемы первого порядка и решения схемы высокого порядка лишь в рассматриваемой пространственно-временной точке. Другими словами, принципиальным отличием оператора послойного перехода гибридной схемы [1] от других подобных операторов является его полная локальность. Данная гибридная схема характеризуется единственным настраиваемым параметром C_1, который меняется в довольно узком диапазоне и может быть выбран при предварительных расчетах на грубых сетках.

Гибридные бикомпактные схемы обладают целым рядом позитивных свойств. Двухточечность разностных уравнений обеспечивает удобство в постановке граничных условий, позволяет использовать произвольно неравномерные сетки и сетки с локальным измельчением. Бикомпактные схемы не являются факторизованными по пространственным переменным и потому их порядок по времени может быть сделан сколь угодно высоким. Сама по себе гибридная схема не зависит от геометрии области и структурированности сетки в силу своей локальности.

В работах [3], [4] показано, что в смысле точности гибридные бикомпактные схемы являются хорошей альтернативой таким методам, как WAF, PPM, WENO5. В докладе [4] строго обоснован механизм работы гибридной схемы и решена задача о выборе оптимальной (т.е. наименее диссипирующей) монотонной схемы-партнера.

Настоящий доклад посвящен двум вопросам: численному анализу гибридной схемы и апробации гибридных бикомпактных схем с факторизацией [5]. Для аргумента весового множителя путем выбора корректной нормировки построено выражение, при котором параметр C_1 зависит только от максимально допустимой амплитуды немонотонностей и схем, входящих в гибридную схему, но не зависит от прочих параметров, в т.ч. решаемой задачи. Этот результат существенно повышает робастность гибридной схемы. На примере 2D задач Римана выяснено, что пространственная факторизация гибридных бикомпактных схем приводит к незначительному понижению точности на 2% (в норме L_1), но при этом дает ускорение счета примерно в 20 раз. Показывается, что в рамках одной и той же пространственной факторизации и при одинаковой точности бикомпактные схемы быстрее компактных в 2 раза при любом числе измерений.

Литература

1. *Рогов Б.В.* Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53. – № 2. – С. 264-274.

2. *Федоренко Р.П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – № 6. – С. 1122-1128.

3. *Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V.* High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations. – Appl. Numer. Math. – 2015. – V. 93. – P. 150-163.

4. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Труды 57-й научной конференции МФТИ [...]. Управление и прикладная математика. – 2014. – Т. 2. – С. 87-88.

5. *Ковеня В.М.* Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.