УДК 004.942

Модель динамической системы тестирования знаний

Н. А. Бессарабов [1,2]
[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]ФГУП ГосНИИАС

I. Введение

Работа Г. Раша [1] положила основу для возникновения математической теории тестирования *IRT* (*Item Response Theory*), чья история насчитывает уже около 60 лет. Исследованию, развитию и расширению модели Раша посвящено значительное число работ. Во многих работах описана методика практического применения тестирования, методы конструирования тестов, кроме того, разработано программное обеспечение, которое включено во многие статистические пакеты, в частности, в открытую систему статистического анализа данных R [2]. Все эти исследования основаны на статической модели тестирования.

Однако процесс тестирования знаний по своей сути является динамическим: в определенные моменты времени происходят процедуры подготовки и корректировки тестов, проведения тестирования и обработки результатов тестирования. В начальном состоянии система имеет лишь экспертные оценки трудности заданий и параметров групп тестируемых. После каждого такта работы системы помимо вычисления уровня подготовленности тестируемых, в зависимости от состояния системы, происходит корректировка состава теста с целью минимизации ошибки оценивания результатов тестирования и уточнение трудности заданий. При этом существенную роль в совершенствовании системы тестирования знаний играет обратная связь – процесс, приводящий к тому, что результат функционирования системы тестирования влияет на параметры, от которых зависит функционирование этой системы. Поэтому актуальным является моделирование системы тестирования как динамической системы с обратной связью.

II. Постановка задачи

1.1 Анализ статистической задачи. Тестирование знаний – процесс применения тестов для измерения знаний испытуемых. Оно состоит из этапа составления тестовых заданий, непосредственно проведения тестирования и последующей обработки результатов, которая дает оценку знаний тестируемых.

Тесты составляют высококвалифицированные эксперты в соответствующей области знаний. Кроме фундаментальных знаний предмета тестирования, составители тестов должны владеть методикой преподавания предмета, понимать уровень знания материала различных контингентов испытуемых, уметь сопоставлять трудность тестовых заданий уровню подготовленности испытуемых, а также иметь опыт проведения испытаний различных уровней с соответствующими психологическими особенностями.

Тест должен быть валидным (т.е. тест дает возможность оценки уровня подготовленности тестируемых в конкретной области), определенным и общедоступным (дает возможность всем тестируемым чётко понимать задания теста), однозначным (с одинаковыми трактовками ответов на задания теста различными экспертами) и надежным (обладает устойчивостью результатов при многократном повторении тестирования). Задания теста должны покрывать в нужной пропорции все основные аспекты области знаний, подготовленность в которой оценивает этот тест, т.е. соответствовать образовательному стандарту.

Процесс тестирования проходит в соответствии с регламентом, который, в том числе, описывает такие нарушения как списывание, подсказывание, неблагоприятные условия тестирования.

Статистическая обработка результатов тестирования n испытуемых по ответам на k заданий теста начинается с формирования матрицы ответов. Матрица ответов $A = \{a_{ij}\}$ — это матрица размерности $n \times k$, которая содержит числовые значения индикатора, связанного с латентной переменной, которую необходимо оценить. В модели Раша вероятность того, что участник с уровнем подготовленности θ_i выполнит верно задание трудности δ_j равна:

$$p(\theta_i, \delta_j) = \frac{1}{1 + \exp[-(\theta_i - \delta_j)]}.$$

Для оценки результатов тестирования обычно применяют метод максимального правдоподобия. Функция правдоподобия L достигает экстремума в критических точках:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} \equiv b_i - \sum_{j=1}^{k} \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)} = b_i - \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 0, \text{ где } i = 1,...,n;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_j} \equiv -c_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)} = -c_j + \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 0, \text{ где } j = 1,...,k;$$

где $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = b_i$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = c_j$

Полученная система уравнений нелинейная и содержит $n+k$ уравнений с $n+k$ неизвестными латентными параметрами $\theta_1,...,\theta_n,\delta_1,...,\delta_k$. Эта система имеет единственное решение, и оно соответствует максимуму логарифмической функции правдоподобия.

Однако стоит учесть, что различные оценки латентных параметров получаются лишь в том случае, когда соответствующие первичные баллы различны, поэтому, в действительности, число различных уравнений не превышает $2k+1$, что обычно значительно меньше $n+k$. Для решения уравнений, как правило, применяют итерационный метод Ньютона.

В итоге получают оценки уровня подготовленности тестируемых и оценки уровня трудности заданий, которые, в соответствии со свойствами метода максимального правдоподобия, являются состоятельными, асимптотически несмещенными, асимптотически эффективными и распределены асимптотически нормально. Если эффективные оценки существуют, то полученные оценки будут эффективными.

Помимо оценок трудности заданий, оцениваются и другие характеристики использованного теста и его заданий: надежность, валидность, дискриминационные возможности и другие. Данные параметры служат для модификации (или создания новой) базы данных вопросов.

Тестируемый с оцененным уровнем подготовленности θ_i считается успешно выполнившим тест, если его уровень превосходит заданный критериальный балл B, т.е. $\theta_i > B$.

Разработаны специальные алгоритмы, позволяющие конструировать тесты, обеспечивающие минимальную среднюю дисперсию оценок уровня подготовленности тестируемых, если известно предполагаемое распределение их уровня подготовленности [3].

Для анализа результатов тестирования используются методы математической статистики. Разработаны методы для проверки адекватности модели Раша и анализа матрицы ответов с помощью критерия согласия χ^2, для проверки равномерности распределения дистракторов (различных вариантов ответов на задание), для проверки значимости расхождения различных результатов тестирования, для проверки параллельности вариантов теста, и многие другие.

Все множество испытуемых, для которых создают тесты, естественно разбить на классы, соответствующие тематике тестов и их назначению. Предположим, что подготовленности испытуемых в логитах в каждом классе характеризуются гауссовым распределением $\mathrm{N}(M_g, \sigma_g^2)$. Параметры класса в начальный момент определяются экспертными оценками и в дальнейшем уточняются по мере обработки результатов тестирования для соответствующего класса g.

Организатор тестирования формирует однородную группу n испытуемых из некоторого класса g и предлагает без ограничения общности один тест с определенным числом заданий k различной трудности, обеспечивающих объективное тестирование всех испытуемых группы. Если группе предлагаются несколько равноценных вариантов теста, то будем считать группой в данный момент то множество тестируемых, которое решает один и тот же вариант теста, а после оценки результатов тестирования все подготовленности выравниваются на единой шкале.

Число заданий в тесте k определяет разрешающую способность теста (РСТ), равную разнице подготовленностей двух испытуемых в логитах, у которых разница в количестве правильных ответов равна 1. В свойстве теста 1 сформулированы оценки РСТ, которые устанавливают нижний предел дифференцирующей способности. К этому пределу нужно стремиться при проектировании заданий теста.

Свойство 1 (о разрешающей способности теста). Разрешающая способность теста, состоящего из k заданий, лежит в интервале $\left[\ln\left(\frac{k+2}{k-2}\right), \ln\left(2\frac{k-1}{k-2}\right)\right]$ для четных k и $\left[2\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right), \ln\left(2\frac{k-1}{k-2}\right)\right]$ для нечетных k.

Величина РСТ зависит только от числа заданий теста k и числа испытуемых, которые дифференцирует РСТ и напрямую не зависит от трудности заданий. В то же время, дисперсия ошибки оценивания подготовленностей определяется трудностями заданий теста.

Определим понятие наилучшего теста как совокупность заданий с такими трудностями заданий $\delta_{j1}, ..., \delta_{jk}$, при которых тест обладает наивысшей разрешающей способностью в данном классе испытуемых $N(M_g, \sigma_g)$, среднеквадратичная ошибка которого для каждого испытуемого максимально приближена к РСТ среди всех возможных тестов с таким же количеством заданий k. Каждый испытуемый в группе данного класса g должен получить хотя бы одно задание соответствующее его подготовленности. Чем больше по численности подгруппа испытуемых с близкими уровнями подготовленности, тем больше должно быть заданий, соответствующих их подготовленностям. Эти характеристики наилучшего теста характеризуют его наивысшую дифференцирующую способность при данном количестве заданий k и данной группе данного класса g испытуемых.

При определенном наборе трудностей заданий, адекватных подготовленности испытуемых, дисперсия должна быть минимальной. Этот факт отражен в свойстве 2.

Свойство 2 (о наилучшем тесте). Пусть тест состоит из *k(g)* заданий и *n* испытуемых принадлежат классу *g*, то есть их подготовленности имеют распределение $N(M_g, \sigma_g)$. Тогда наилучшим тестом будет совокупность k заданий с трудностями $\delta_j, ..., \delta_k$, где трудности определены как квантили нормального распределения $N(M_g, \sigma_g)$: $\delta_j = F^{-1}\left(\frac{j}{k+1}\right)$, где $j = 1,...,k$, F^{-1} – обратная функция нормального распределения $N(M_g, \sigma_g)$.

Так как распределение трудности для наилучшего теста совпадает с распределением подготовленности в классе, представляется логичным при оптимизации трудности для каждого испытуемого взять в качестве критерия средневзвешенную дисперсию: $\sigma^2_{\text{взв}}(\theta, \delta_{j1}, ..., \delta_{jk}) \to \min\limits_{\delta_{j1},...,\delta_{jk}}$, где дисперсия для каждого испытуемого θ равна:

$$\sigma^2(\theta, \delta_{j1}, ..., \delta_{jk}) = \frac{2}{\dfrac{1}{1+ch(\theta-\delta_{j1})} + \cdots + \dfrac{1}{1+ch(\theta-\delta_{jk})}},$$

а средневзвешенная дисперсия равна:

$$\sigma^2_{\text{взв}}(\theta, \delta_{j1}, ..., \delta_{jk}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(\tau, \delta_{j1}, ..., \delta_{jk}) \, \frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(\theta-\tau-M_g)^2}{2\sigma_g^2}} \, d\tau \ .$$

Свойство 3 (о наивысшей точности теста). При минимизации средневзвешенной дисперсии для каждого испытуемого с подготовленностью θ, существует единственный набор трудностей заданий $(\delta^0_{j1},..., \delta^0_{jk})$ при котором дисперсия данного теста имеет минимальное значение $\sigma^2_{\min}(\theta, k(t,g)) = \sigma^2_{\text{взв}}(\theta, \delta^0_{j1},..., \delta^0_{jk})$.

Свойство 3 определяет предельную точность теста – минимально возможную ошибку оценки подготовленности при определенном оптимальном наборе трудности заданий, адекватных подготовленности испытуемых. Представляется логичным при оптимизации трудности заданий в группе взять в качестве критерия математическое ожидание квадрата разницы получаемого среднеквадратического отклонения и минимального в группе.

Для учета факторов, мешающих получению объективных оценок подготовленности тестируемых, таких как списывание, подсказки, применимы результаты исследований по квалиметрии групповой деятельности операторов [4]. Введем коэффициент взаимодействия испытуемых $K_{вз}$, равный 0 при отсутствии взаимодействия и равный 1 для абсолютного взаимодействия испытуемых, действующих согласованно, как один человек. При коэффициенте взаимодействия, стремящемся к 1, для соответствующей группы потребуем, чтобы среднеквадратичное отклонение оценок подготовленности тестируемых стремилось к бесконечности.

Предполагается, что тестируется группа из класса с распределением подготовленности $N(M_g, \sigma_g)$. При $K_{вз} = 0$ параметры распределение M_g, σ_g остаются прежними.

При $0 < K_{вз} < 1$, когда есть взаимодействие, среднее смещается в сторону лидера группы, на которого все будут ориентироваться, что вносит свой вклад в результаты тестирования. В таком случае целесообразно описывать группу распределением $\mathrm{N}(\alpha(K_{вз}) \cdot M_g, \beta(K_{вз}) \cdot \sigma_g^2)$, где $\alpha(K_{вз})$ и $\beta(K_{вз}) = 1 - K_{вз}$ – функции, описывающие влияние взаимодействия на средний уровень подготовленности группы и разброс подготовленностей в группе. При росте $K_{вз}$, разброс подготовленностей в группе уменьшается.

При $K_{вз} = 1$ взаимодействие участников тестирования абсолютное, т.е., все тестируемые дают одинаковые ответы на каждый вопрос теста. В этом случае целесообразно не засчитывать такой результат тестирования, так как дисперсия подготовленности стремится к бесконечности.

Свойство 4 (о полном взаимодействии группы тестируемых). При $K_{вз} = 1$ ранг матрицы ответов равен 1 и $D\{\theta_i\} \to \infty$.

1.2. Постановка динамической задачи. Организатор тестирования проектирует базу заданий для многих вариантов тестов, задает и корректирует образовательный стандарт для различных классов испытуемых. Математическая модель динамической системы автоматического управления тестированием состоит в том, что в каждый момент проведения тестирования *t* исследуют однородную группу испытуемых с индексом класса *g* в количестве *n(t,g)* человек, которым предлагают тест, состоящий из *k(t,g)* заданий с трудностями $\delta_{j1}, ..., \delta_{jk}$. Результаты тестирования, как и в статической ситуации, приводят к составлению матрицы ответов $A = \{a_{ij}(t,g)\}$, где $i = 1,...,n(t,g)$ и $j = 1,...,k(t,g)$. В результате обработки этой матрицы определяют подготовленности испытуемых $\theta_{i1}, ..., \theta_{in}$ и трудности заданий $\delta_{j1}, ..., \delta_{jk}$.

Среди заданий теста в момент времени *t* могут быть $d(t,g) \le k(t,g)$ узловых заданий, применявшихся на ранних моментах времени с трудностями $\delta_{l1}, ..., \delta_{ld}$, где индексы $\{l_1,...,l_d\}$ включены в множество индексов $\{j_1,..., j_k\}$. Впервые применяемые задания имеют начальные трудности, равные значениям, полученным из экспертных оценок. Узловые задания (ранее применявшиеся) имеют трудности, оцененные на последний момент времени применения каждого из них. Кроме трудностей $\delta_{l1}, ..., \delta_{ld}$, из базы данных извлекаются дополнительные атрибуты, необходимые для рекуррентных вычислений в момент времени *t*: $c_{l1}, ..., c_{ld}$ и $\theta_{l1}, ..., \theta_{ld}$ – вычисленные в момент последнего применения соответствующего задания параметры, как и в статической задаче – суммы первичных баллов и соответствующие подготовленности.

Если в момент времени *t* принято решение уменьшить число заданий в тесте, то тест считается прежним, если в матрице ответов по этим заданиям элементы соответствующих столбцов были равны только 0 или 1. В противном случае считается, что это новый тест. Увеличение количества заданий за счет добавления заданий по теме теста или замена заданий на задания с аналогичными трудностями не приводит к изменению теста.

III. Описание динамической системы

Критерием оптимальности распределения заданий в тесте в данной группе *g* по их трудностям естественно принять математическое ожидание квадрата разницы среднеквадратического отклонения ошибки способностей тестируемых от наилучшей точности теста при данном количестве заданий в тесте:

$$J(\delta_{j1}, ..., \delta_{jk}, k(t,g), t, g) = E_\theta \left\{ \left(\sigma(\theta, \delta_{j1}, ..., \delta_{jk}) - \sigma_{\min}(\theta, k(t,g)) \right)^2 \right\}$$

Поэтому автоматическая система управления тестированием должна в рекуррентной форме формировать оптимальный набор трудностей заданий в текущий момент времени для заданного числа заданий, получая на вход минимальное значение ошибки и вычисленное значение, получаемое посредством обратной связи на сумматоре рассогласования.

Статистическая обработка результатов тестирования происходит на основе метода максимального правдоподобия.

Уравнения правдоподобия имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \sum_{f=1}^{k} a_{ij_f} - \sum_{f=1}^{k} \frac{\exp(\theta_i - \delta_{j_f})}{1 + \exp(\theta_i - \delta_{j_f})} = 0, \text{ где } i = 1, ..., n;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_{j_f}} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij_f} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\exp(\theta_i - \delta_{j_f})}{1 + \exp(\theta_i - \delta_{j_f})} = 0, \text{ где } f = 1, ..., k;$$

с условиями типа равенства, учитывающими информацию, полученную в предыдущие моменты времени:

$c_{l_s} = \sum_{r=1}^{n_{l_s}} \frac{\exp(\theta_{m_r} - \delta_{l_s})}{1+\exp(\theta_{m_r} - \delta_{l_s})}$, где $s = 1,...,d$, $\theta_{\mathrm{m_r}}$, δ_{l_s} и c_{l_s} вышеописанные атрибуты ранее вычисленных трудностей.

Однородный класс испытуемых характеризуется гауссовым распределением подготовленностей $N(M_g, \sigma_g)$. Параметры класса на каждом такте времени t для соответствующего класса g пересчитываются.

На рис.1 представлена структурная схема автоматической системы управления процессом тестирования. На рисунке обозначено: ξ – случайная помеха с нулевым средним и ограниченной дисперсией при $0 \le K_{вз} < 1$, σ^2 – дисперсия оценки уровня подготовленности, η – случайная помеха при измерении уровней подготовленности и трудности задач, A – матрица ответов, g – идентификатор класса тестируемых. Сплошной линией на рисунке обозначена непосредственная связь в структурной схеме, а пунктирной – связь вне замкнутого контура управления.

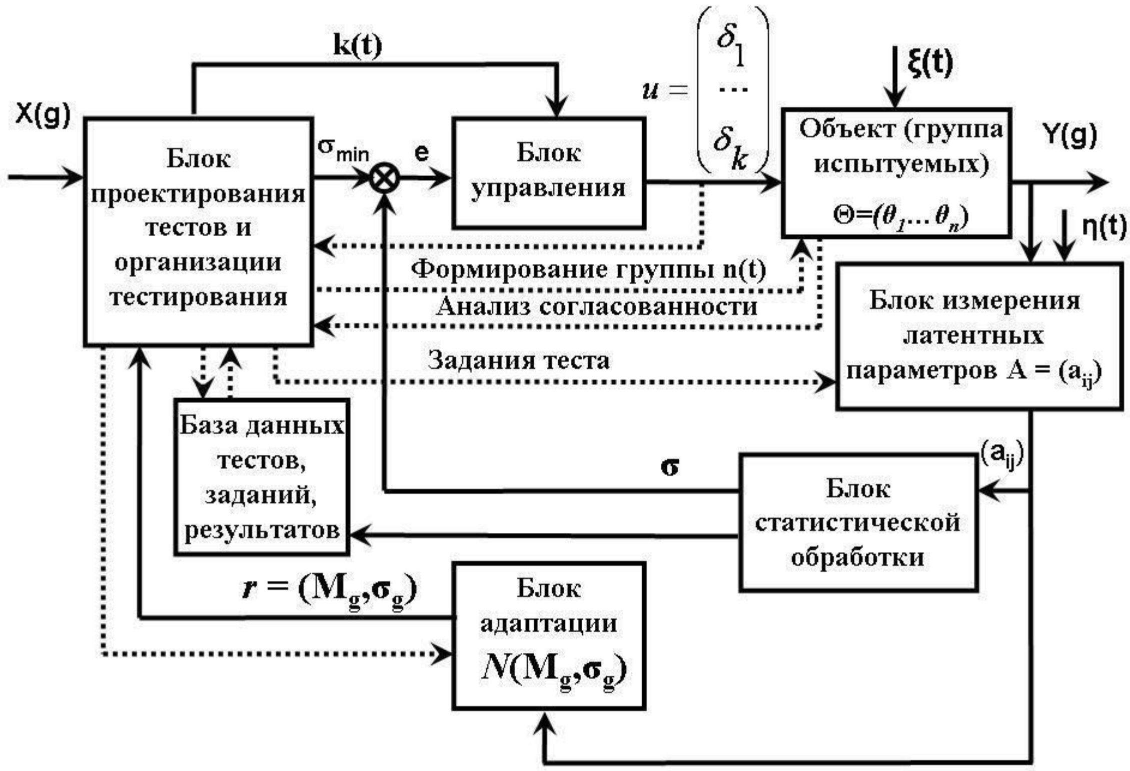

Рис 1. Структурная схема математической модели динамической системы автоматического управления тестированием

Вектор управляющего воздействия содержит в себе количество заданий теста и трудности заданий. В начальный момент времени вектор управления (трудности заданий) формируется на основании теоретических предпосылок о гауссовом распределении подготовленности. В дальнейшем в соответствии с рекуррентной процедурой стохастической аппроксимации на каждом такте времени t происходит уточнение трудности заданий и параметров нормального распределения. Функция правдоподобия отличается от вышеприведенного статического вида тем, что добавляются плотности с теми заданиями, которые встречались на предыдущих тактах времени t. В условии типа равенства трудности заданий варьируемы, а подготовленности принимаются константами, равными последним оценкам, полученным на каком либо раннем такте времени. При этом узловыми могут оказаться задания из любого числа ранее решаемых тестов в любые предыдущие моменты времени. Это обеспечивает единую шкалу трудности заданий и подготовленности тестируемых.

На каждом такте времени t определяется шаг в минимизации суммарного критерия дисперсии в процедуре стохастической аппроксимации, и оптимальные значения трудности заданий вместе с оценками подготовленности и достаточными статистиками записываются в базу данных.

Объектом управления является автоматизированная система тестирования (АСТ). Кроме случайного характера параметра Θ тестируемых, объект возмущается также некоторой случайной ненаблюдаемой помехой $\xi(t)$: она описывает возможное знание испытуемыми конкретных вопросов теста, возможность угадывания и списывания, психологическое волнение, а также другие случайные факторы.

Блок адаптации (самоорганизации) в соответствии с векторами состояния системы, управляющего воздействия и управления, формирует вектор перенастраиваемых параметров, осуществляющий подстройку параметров Блока управления (формирование сложностей заданий теста $\{\delta_j\}$), управляющего объектом (группа тестируемых). В блоке управления в каждый момент времени $i = 1, 2, \ldots$ проверяются следующие условия:

1) $\sigma^2\left(\theta, \delta_1, ..., \delta_{k(t)}\right) > \sigma^2{}_{\min}$, где σ_{min} – предельная дисперсия оценки подготовленности;

2) изменились ли параметры (математическое ожидание и дисперсия) распределения уровня подготовленности тестируемых.

При выполнении хотя бы одного из этих условий в блоке управления решается задача оптимизации и тем самым вычисляется оптимальный набор трудностей заданий теста $\{\delta_j\}$, где $j = 1,...,k(t)$, на основании вектора наблюдений. В каждый такт времени t

задача оптимизации решается с начальным условием в виде оптимального набора трудностей заданий теста для такта работы *t-1*. В качестве начального распределения уровня трудности заданий взято равномерное распределение. Кроме того, перед началом работы системы должен быть подготовлен ряд заданий теста и определена их трудность. Трудность этих заданий может быть определена либо посредством апробации их на стратифицированной нормативной выборке тестируемых, либо на основании экспертной оценки.

Имеют место следующие свойства динамической системы автоматического управления процессом тестирования:

Теорема (о сходимости и скорости сходимости стохастической аппроксимации). Пусть на каждом такте t коэффициент взаимодействия удовлетворяет условию $0 \le K_{вз} < 1$ и ранг матрицы ответов не равен 1.

Пусть критерий минимизации $J(\delta_1, \cdots, \delta_k)$ имеет вид:

$$J(\delta_1, \cdots, \delta_k, k(t,g), t, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\sigma^2_{\text{взв}}(\theta, \delta_1, ..., \delta_k)} - \sqrt{\sigma^2_{\min}(\theta, k(t,g))} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta - M)^2}{2\sigma^2}} d\theta \xrightarrow[\delta_1, \dots \delta_k]{} \min$$

Пусть взаимодействие в группе и прочие случайные факторы приводят к тому, что градиент критерия измеряется со случайной помехой: $\nabla J(\delta_1, \cdots, \delta_k) + \vec{\xi}_t$, где $\vec{\xi}_t$ - независимые случайные величины с ограниченной дисперсией.

Тогда процедура стохастической аппроксимации для поиска оптимального вектора $\vec{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_k)^T$: $\vec{\delta}_t = \vec{\delta}_{t-1} - \gamma_t \left(\nabla J(\vec{\delta}_{t-1}) - \vec{\xi}_{t-1} \right)$, где множители γ_t удовлетворяют условиям $\gamma_t > 0, \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty$, $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t^2 < \infty$, сходится при $t \to \infty$ в любой группе g почти наверное к оптимальному $\vec{\delta}^0$.

При $t \to \infty$ в любой группе g вектор $\sqrt{t}\left(\vec{\delta}_t - \vec{\delta}^0\right) \approx N(0, V)$ асимптотически нормален, где матрица $V = \nabla^2 J(\vec{\delta}^0)^{-1} \, D \, \nabla^2 J(\vec{\delta}^0)^{-1}$, D – матрица дисперсий шума $\vec{\xi}_t$ [5, 6].

IV. Заключение

В данной работе предложена и исследована динамическая система автоматического управления процессом тестирования. В определенные моменты времени происходят процедуры подготовки и корректировки тестов, проведения тестирования и обработки результатов. В начальном состоянии система имеет лишь экспертные оценки трудности заданий и параметров групп тестируемых. После каждого такта работы системы помимо вычисления уровня подготовленности тестируемых, в зависимости от состояния системы, происходит корректировка состава теста с целью минимизации ошибки оценивания результатов тестирования и уточнение трудности заданий. При этом существенную роль в совершенствовании системы тестирования играет обратная связь, на основе которой вырабатывается управляющее воздействие – вектор трудности заданий очередного теста. Кроме того, исследовано влияние взаимодействия участников тестирования на итоговый результат. Для предложенной системы исследованы вопросы существования сходимости и оценена скорость сходимости.

V. Литература

1) *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. – Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research, 1960. 199 p.

2) *Mair P., Hatzinger R.* Extended Rasch Modeling: The eRm Package for the Application of IRT Models in R. // Journal of Statistical Software. – May 2007, V. 20, Issue 9.

3) *Бессарабов Н.А., Бондаренко А.В., Кондратенко Т.Н., Тимофеев Д.С.* Алгоритм конструирования критериально-ориентированного теста. // Вестник компьютерных и информационных технологий – №7/ 2014. с. 42-48.

4) *Багрецов С.А., Бондаренко А.В., Обносов Б.В.* Квалиметрия групповой деятельности операторов сложных систем управления. – М.: Физматлит, 2006. 384 с.

5) *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации. // Автоматика и телемеханика, №8, 1980, с. 74-84.

6) *Поляк Б.Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. I. Общий случай. // Автоматика и телемеханика, №12, 1976, с. 83-94.