

П. А. Михеев

Применение градиентного метода для оптимизации характеристик волнового фронта электромагнитной волны

В статье рассмотрена некорректная обратная задача — поиск функции, которая после свертки с заданным ядром будет обладать нужными свойствами. Описано применение градиентного метода к этой задаче и разработан эффективный метод расчета градиента. Полученные результаты могут быть использованы для синтеза электромагнитных волн с заданными характеристиками.

Ключевые слова: градиентный метод, двумерная свёртка, обратная задача.

1. Введение и постановка задачи оптимизации.

В теории цифровой обработки сигналов часто встречается задача восстановления исходного сигнала по выходному — результату свертки исходного сигнала с известной аппаратной функцией [1, §1.1]. При этом обычно подразумевается, что решение существует и изучаемый выходной сигнал был получен из какого либо исходного.

Существует также класс задач оптимизации, когда желаемый выходной сигнал заведомо не может быть результатом свертки с аппаратной функцией, и требуется получить наилучшее приближение к нему. Обычные методы восстановления исходного сигнала (к примеру, обращение свертки [2, §4.4]) в задачах оптимизации не подходят, вместо этого приходится применять различные итерационные методы. Большое значение при выборе метода имеет его вычислительная сложность.

Один из примеров такой задачи оптимизации — поиск конфигурации точечных источников, при которой в области наблюдения энергия излучения будет распределена нужным образом. Пусть $A(p, q)$ — комплексная амплитуда точечного источника в точке (p, q) , $\frac{1}{2}D(x, y)$ — желаемое распределение энергии в точке (x, y) . Поле $B(x, y)$ в области наблюдения выражается по формуле:

$$B(x, y) = \iint K(x - p, y - q)A(p, q) dp dq.$$

Ядро свёртки K — некоторая аналитическая функция. При любом выборе A , энергия поля $\frac{1}{2}B \cdot B^*$ также будет аналитической функцией, однако желаемое распределение энергии нередко является разрывным. В этих случаях точное решение не существует и ставится задача минимизации невязки $\sigma = \iint (B \cdot B^* - D)^2 dx dy$.

В статье описывается способ применения градиентного метода для численного решения указанной задачи минимизации, не требующий больших вычислительных ресурсов.

Для получения численного решения нужно перейти к дискретной постановке. Рассматривается следующая формулировка:

$$A = \{a_{i,j}\}, \quad B = \{b_{i,j}\}, \quad D = \{d_{i,j}\},$$

$$b_{i,j} = \sum_{p,q} K(i-p, j-q) a_{p,q}, \quad (1)$$

$$\sigma = \sum_{i,j} (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^* - d_{i,j})^2, \quad (2)$$

$$\sigma(A) \rightarrow \min.$$

Здесь A и B – комплексные матрицы $n \times m$ элементов, K – ядро свёртки, D – матрица действительных чисел, характеризующая целевую функцию. Требуется задать элементы матрицы A так, чтобы минимизировать функционал $\sigma(A)$.

2. Использование градиентного метода для решения задачи оптимизации.

Для расчета градиента будем преобразовывать формулу (2). Выразим приращение σ через приращения $b_{i,j}$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sum_{i,j} 2 (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^* - d_{i,j}) \cdot d (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^*), \\ d (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^*) &= d ((\operatorname{Re} b_{i,j})^2 + (\operatorname{Im} b_{i,j})^2) = \\ &= 2 \operatorname{Re} b_{i,j} \cdot d \operatorname{Re} b_{i,j} + 2 \operatorname{Im} b_{i,j} \cdot d \operatorname{Im} b_{i,j} = 2 \operatorname{Re} (b_{i,j}^* \cdot d b_{i,j}), \\ d\sigma &= \sum_{i,j} 4 (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^* - d_{i,j}) \cdot \operatorname{Re} (b_{i,j}^* \cdot d b_{i,j}). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим:

$$c_{i,j} = 4 (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^* - d_{i,j}). \quad (4)$$

Тогда (3) можно представить в виде:

$$d\sigma = \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot \operatorname{Re} (b_{i,j}^* \cdot d b_{i,j}).$$

Используя (1), найдем частные производные:

$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial \operatorname{Re} a_{p,q}} = K(i-p, j-q),$$

$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial \operatorname{Im} a_{p,q}} = iK(i-p, j-q),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \operatorname{Re} a_{p,q}} = \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot \operatorname{Re} \left(b_{i,j}^* \cdot \frac{\partial b_{i,j}}{\partial \operatorname{Re} a_{p,q}} \right) = \operatorname{Re} \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot b_{i,j}^* \cdot K(i-p, j-q),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial \operatorname{Im} a_{p,q}} &= \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot \operatorname{Re} \left(b_{i,j}^* \cdot \frac{\partial b_{i,j}}{\partial \operatorname{Im} a_{p,q}} \right) = \operatorname{Re} \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot b_{i,j}^* \cdot iK(i-p, j-q) = \\ &= -\operatorname{Im} \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot b_{i,j}^* \cdot K(i-p, j-q).\end{aligned}$$

Записав обе производные в виде одного комплексного числа и подставив значение $c_{i,j}$ из (4), получим градиент σ в точке p, q :

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \sigma)_{p,q} &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \operatorname{Re} a_{p,q}}, \frac{\partial \sigma}{\partial \operatorname{Im} a_{p,q}} \right) = \left(\sum_{i,j} c_{i,j} \cdot b_{i,j}^* \cdot K(i-p, j-q) \right)^* = \\ &= 4 \left(\sum_{i,j} (b_{i,j} \cdot b_{i,j}^* - d_{i,j}) \cdot b_{i,j}^* \cdot K(i-p, j-q) \right)^*.\end{aligned}$$

Заметим, что сумма в скобках является сверткой с ядром $K_R(x, y) = K(-x, -y)$.

В матричной записи градиент можно выразить следующим образом:

$$\operatorname{grad} \sigma = 4 \cdot \operatorname{conj} \left([(B * \bar{B} - D) * \bar{B}] \circ K_R \right), \quad (5)$$

где $*$ — поточечное (адамарово) умножение матриц, \circ — операция свёртки, $\operatorname{conj}(X)$ и \bar{X} — комплексное сопряжение. Расчет свертки в формуле (5) будем проводить через быстрое преобразование Фурье, по методу, описанному в [3, §11.3].

Опишем общую схему градиентного метода. Пусть A_n и B_n — матрицы A и B на n -ой итерации. Начальное приближение определим по формуле $A_0 = \{a_{i,j}^0\}$, $a_{i,j}^0 = \frac{\sqrt{d_{i,j}}}{m}$, где $m = \left| \sum_{i,j} K(i, j) \right|$. В вырожденном случае, когда K — дельта-функция, выбранное таким образом начальное приближение сразу же будет решением, при котором достигается минимум $\sigma = 0$.

Переход к следующей итерации осуществляется по формулам:

$$B_n = A_n \circ K,$$

$$A_{n+1} = A_n - 4\alpha_n \cdot \operatorname{conj} \left([(B_n * \bar{B}_n - D) * \bar{B}_n] \circ K_R \right).$$

Здесь α_n — шаг метода на итерации n . Вычислительная сложность расчета градиента по формуле (5) невелика — сравнима со сложностью решения прямой задачи (1), поэтому нецелесообразно решать одномерную задачу оптимизации шага α_n . Вместо этого будем использовать метод дробления шага с расчетом градиента на каждой итерации.

В качестве критерия окончания итерационного процесса возьмем условие уменьшения скорости оптимизации:

$$\frac{2|\sigma(A_n) - \sigma(A_{n+1})|}{\sigma(A_{n+1})} < \varepsilon.$$

3. Пример.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: рассчитать световую волну, которая после прохождения через объектив создавала бы контрастное изображение, максимально близкое к показанному на рисунке 1. Аппаратная функция K объектива показана на рисунке 2 (яркость изображения равна амплитуде функции K в соответствующей точке).

Для численного решения нужно дискретизировать задачу. Была использована сетка 72×72 точки. На рисунке 3 показано изображение до оптимизации (начальное приближение). на рисунке 4 — изображение, полученное после 49 итерации описанного выше метода оптимизации. На графике 5 приведена зависимость нормы σ от номера итерации.

4. Результаты.

Был разработан эффективный метод расчета градиента минимизируемого функционала $\sigma(A)$. Низкая вычислительная сложность метода позволила использовать градиентную оптимизацию при обработке больших объемов данных в задаче синтеза электромагнитных волн с заданными свойствами.

Список литературы

1. Хургин Я.И., Яковлев И.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
2. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. (Allan V. Oppenheim, Applications of Digital Signal Processing) М.: Мир, 1980. 552 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. (William K. Pratt, Digital image processing) М.: Мир, 1982. т.1, 311 с.

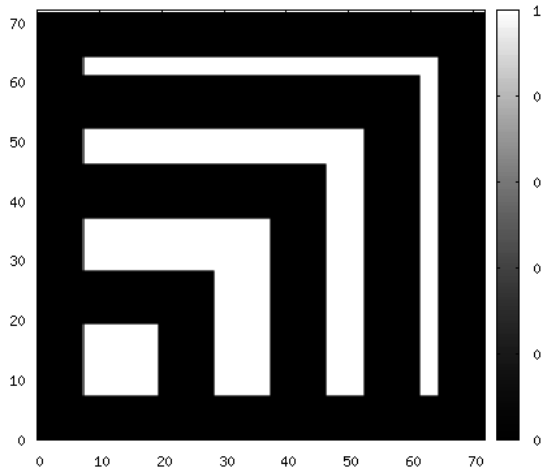


Рис. 1: Целевое изображение

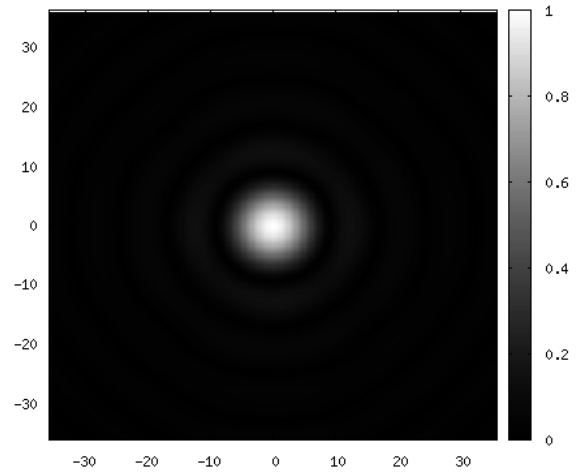


Рис. 2: Амплитуда ядра свертки K

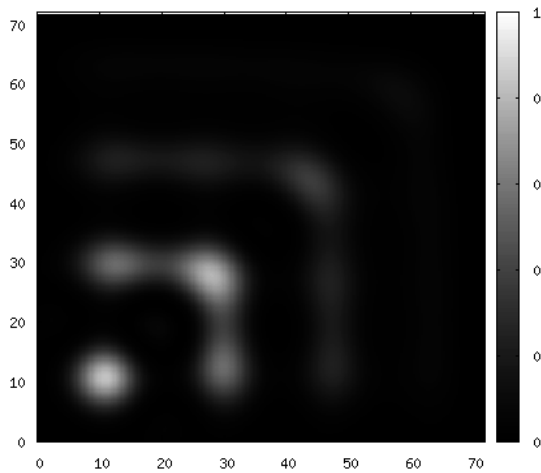


Рис. 3: Изображение до оптимизации (начальное приближение)

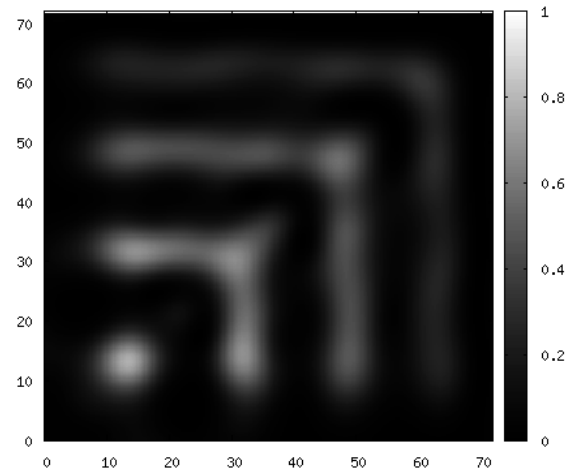


Рис. 4: Изображение после оптимизации

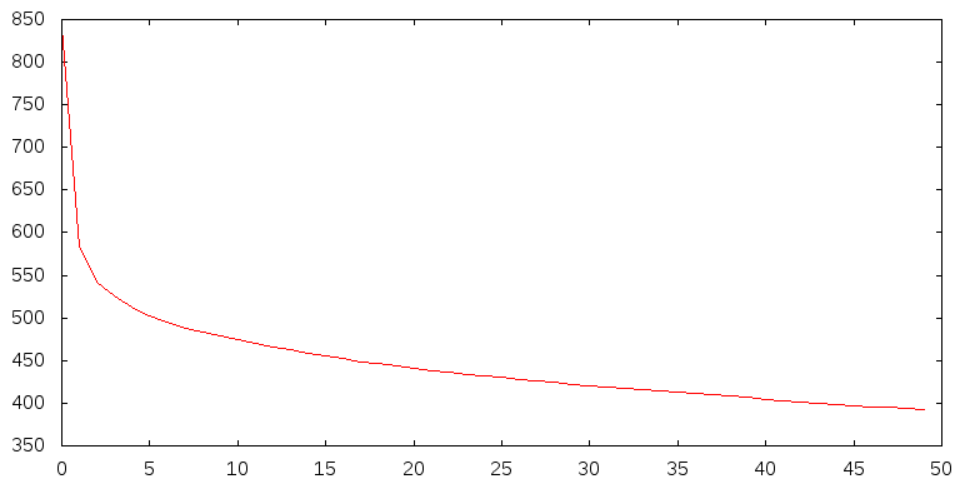


Рис. 5: Зависимость σ от номера итерации