УДК 534.11

Собственные продольные колебания тонкого стержня переменного сечения при учете инерции поперечного сечения

А.А. Гавриков[1]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

С помощью модифицированного метода ускоренной сходимости [1,2] для нахождения собственных значений и функций обобщенной задачи Штурма-Лиувилля, основанном на введении дополнительного спектрального параметра и решении возмущенной задачи, изучаются собственные продольные колебания тонкого упругого закрепленного стержня произвольного сечения при учете инерции поперечного сечения, описываемые уравнением [3]

$$\rho S(x)U_{tt}(x) - \rho\nu^2[I(x)U_{xtt}(x)]_x = E[S(x)U_x(x)]_x$$

с краевыми условиями $U(0) = U(l) = 0$. Здесь ρ — плотность, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $S(x)$ — площадь сечения, $I(x)$ — момент инерции сечения, l — длина стержня, $U(x)$ — смещение центра тяжести сечения в направлении касательной к упругой линии. Соответствующая обобщенная задача Штурма-Лиувилля имеет вид

$$[(S(z) - \lambda\nu^2 l^{-2} I(z))u'(z)]' + \lambda S(z)u(z) = 0; \qquad (1)$$
$$0 \le z \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

где $z = x/l$, спектральный параметр $\lambda = \omega\rho l^2/E$, ω — частота собственных колебаний, $U(x,t) = u(z)\exp(i\omega t)$. Исследуемое уравнение можно записать в более общем виде

$$\left(p(x,\lambda)u'\right)' + r(x,\lambda)u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (2)$$

и воспользоваться методикой, изложенной в [1,2]. Вводится дополнительный спектральный параметр μ и изучается расширенная задача

$$\left(p(x,\lambda)u'\right)' + \mu r(x,\lambda)u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (3)$$

совпадающая с исходной при $\mu = 1$. Для искомых λ, принадлежащих некоторому интервалу Λ на положительной полуоси, с помощью метода ускоренной сходимости численно строятся т.н. «собственные кривые» — семейства функций $\mu_n(\lambda)$. Полагается, что λ_m^* является собственным значением задачи (1), (2) а соответствующие им формы есть собственные функции, если $\mu_n(\lambda_m^*) = 1$ есть собственное значение классической задачи

$$\left(p(x,\lambda_m^*)u'\right)' + \mu(\lambda_m^*)r(x,\lambda_m^*)u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (3)$$

Границы интервала Λ определяются числом узлов соответствующей собственной функции. Для практического применения достаточно найти λ_m^-, λ_m^+, такие что $\mu(\lambda_m^-) < 1$, $\mu(\lambda_m^+) > 1$, после чего следующие приближения λ_m находятся, например, с помощью интерполяции. Критерием близости текущего λ_m к искомому λ_m^* служит близость вспомогательного спектрального параметра к единице $\left|\mu(\lambda_m^*) - 1\right| < \varepsilon$.

Кратко сформулируем основные этапы применения метода ускоренной сходимости для нахождения текущего значения $\mu(\lambda_m)$ [1,2]: 1) строится оценочное (например, используя принцип Рэлея) значение $\mu^{(0)}(\lambda_m)$; 2) для найденного $\mu^{(0)}(\lambda_m)$ интегрируется задача Коши для уравнения (2), в которой полагается $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ 3) По значению $\xi \neq 0, u(\xi) = 0$, близкому к единице, строится поправка к собственному числу, учитывающая значение производной $u'(\xi)$ и дающая квадратичную скорость сходимости к искомому $\mu(\lambda_m)$. Критерием близости служит разность $\left|\xi - 1\right| < \varepsilon$. Далее, в случае необходимости, повторяются пункты 2-3.

Приведем результаты расчетов собственных чисел и функций (рис. 1), проведенных в программном пакете Maple для стержня конического сечения $S(z) = \pi r^2$, $I(z) = \pi r^4 / 2$, $r = (1 - z/2)$, с параметрами $\nu^2 l^{-2} = 9 \cdot 10^{-4}$: $\lambda_1 = 10.273238$, $\lambda_2 = 39.428180$, $\lambda_3 = 86.913344$, $\lambda_4 = 151.147226$, $\lambda_5 = 230.104658$.

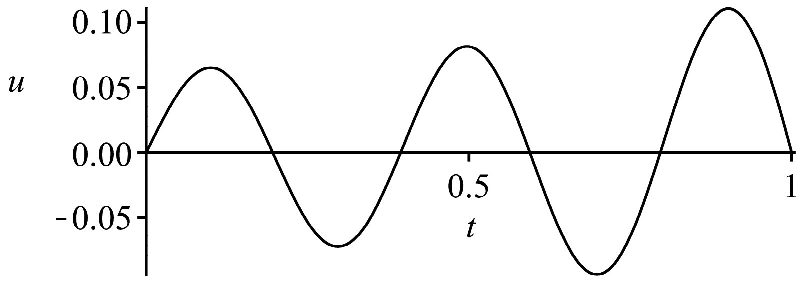

Рис. 1. Собственная функция, соответствующая λ_5.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00282 А, 15-01-00827 А и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-2710.2014.1.

Литература

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. – Boca Raton: CRC Press, 2005. – 255 p.
2. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Собственные колебания распределенных неоднородных систем, описываемых обобщенными краевыми задачами. – ПММ. – 1999. – Т. 63. – Вып. 4. – С. 645-654.

3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М., Ленинград: ОНТИ НКТП СССР. Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии, 1935. – 674 с.