

**Метод определения локальной плотности тока в ВТСП лентах 2 поколения***А.И. Блудова*<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)<sup>2</sup>Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»**Введение**

Сверхпроводящие ленты умеют запасать в сверхпроводящем состоянии в себе магнитный поток. То есть, если поместить при комнатной температуре сверхпроводящую ленту в сильное магнитное поле и охладить ленту до сверхпроводящего состояния, после чего выключить поле, лента начнёт генерировать такое же магнитное поле. Для того чтобы генерировать это поле, в ней появятся круговые токи. Практически важная задача заключается в том, чтобы определить плотности и направления этих токов в каждой точке ленты для того, чтобы затем исследовать её локальные отклонения.

Существует несколько способов решения данной задачи. Простейший вариант заключается в определении локальной плотности тока напрямую путём транспортных измерений. К сожалению, такие прямые измерения всегда приводят к разрушению образца (или как минимум к его модификации) и позволяют получить только дискретную информацию о плотности тока в районе зонда [1].

Косвенные методы как правило включают пространственное измерение создаваемого магнитного поля и отвечают требованиям избавления от взаимодействия с образцом а также получения пространственной информации о распределении плотности тока на любых площадях. Зависимость вертикальной компоненты магнитного поля ленты от координаты ( $x, y$ ) на ленте может быть определена с помощью магнитооптики или с помощью датчика Холла, сканирующего магнитное поле на заданной высоте над поверхностью ленты [2].

Плотность тока затем определяется путём обращения закона Био-Савара-Лапласа. Данная задача относится к классу так называемых некорректных задач, что подразумевает, что она не имеет единственного решения. Существует множество подходов к поиску уникального решения близкого к действительному распределению плотности тока, но, как правило, они связаны с серьёзными ограничениями. Метод сопряжённых градиентов предоставляет высокую точность, однако требует больших вычислений, которые, как правило, выполняются на суперкомпьютерных кластерах [3]. Метод преобразования Фурье сравнительно быстр, однако, он предоставляет более низкую точность [4].

В данной работе метод преобразования Фурье был улучшен с помощью регуляризации Тихонова для увеличения точности без существенного увеличения времени вычисления.

**Обратная задача восстановления плотности тока по магнитному полю***Магнитное поле*

Магнитное поле, создаваемое током, описывается уравнением Био-Савара-Лапласа. Для контура с током он выглядит следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I [\mathbf{dr} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})]}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \quad (1)$$

Поскольку мы имеем дело не с токами, текущими по тонкому проводу, а с токами, распределёнными по объёму сверхпроводящей ленты, удобно будет пользоваться плотностью тока. Нас интересует только вертикальная компонента магнитного поля. Поскольку толщина ленты много меньше её длины и ширины, будем рассматривать плотности тока только в плоскости ленты. Таким образом,  $dz = z$  (толщине ленты), а  $z_0 = z$

=  $h$  (высоте детектора над лентой). С данным упрощением вертикальная компонента магнитного поля запишется в виде:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{z dx dy (j_x (y_0 - y) - j_y (x_0 - x))}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + h^2)^{3/2}} \quad (2)$$

### Магнетизация

Неудобно решать уравнение с векторным неизвестным, хотелось бы искать скалярную функцию. Для этого удобно использовать намагниченность (она же плотность магнитного момента). Намагниченность  $g$  определяется, как:

$$\mathbf{j} = -\text{rot}(\mathbf{e}_z g) = -[\mathbf{e}_z \times \text{grad } g] \quad (3)$$

Если мы просто подставим плотность тока, полученную из выражения (3) в выражение для вертикальной компоненты магнитного поля (2), то оно будет содержать производные магнитного поля по разным направлениям. Для того чтобы избежать этого, авторами была использована формула интегрирования по частям. В результате, вертикальная компонента магнитного поля может быть записана, как:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{z dx dy g ((y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2 - 2h^2)}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + h^2)^{5/2}} \quad (4)$$

### Уравнение Фредгольма

Можно разделить верхнюю и нижнюю части уравнения (4) на толщину ленты  $z$ . Таким образом, мы будем иметь дело с двумерной, а не с трёхмерной плотностью тока. Таким образом, мы свели нашу задачу к классическому виду интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Оно выглядит следующим образом:

$$B_z(x_0, y_0) = \int_s dx dy K((x_0 - x, y_0 - y)) g(x, y) \quad (5)$$

Где ядро  $K$  определяется как

$$K(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{x^2 + y^2 - 2h^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}} \quad (6)$$

Таким образом, решение поставленной задачи можно было бы искать путём минимизации функционала, представляющего собой норму разности правой и левой частей уравнения:

$$C_0(g) = \left\| \int_s dx dy K((x_0 - x, y_0 - y)) g(x, y) - B_z(x_0, y_0) \right\|_2^2 \quad (7)$$

### Регуляризация Тихонова

К сожалению, что уравнению (7) могут удовлетворять многие функции  $g$ , которые могут быть нефизичными (негладкие функции, функции с большой амплитудой колебания и т.д., то-есть такие функции, которые не могут отображать реальную намагниченность

ленты). Поэтому данная задача относится к классу так называемых некорректных задач. Для решения данной задачи требуется ввести дополнительные условия на гладкость функции, которую мы ищем. Рассмотрим вместо описанного выше функционала  $C_0$  следующий функционал  $C$ :

$$C(g) = \left\| \int_S dx dy K((x_0 - x, y_0 - y)) g(x, y) - B_z(x_0, y_0) \right\|_2^2 + \lambda \Omega[g] \quad (8)$$

который отличается от предыдущего функционала введением второго слагаемого:

$$\lambda \Omega[g] = \lambda \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \right\|_2^2 \quad (9)$$

Введение такого слагаемого называется регуляризацией. По сути, это дополнительное ограничение на вторую производную решения наряду с условиями, заданными самим уравнением. Коэффициент  $\lambda$  называется параметром регуляризации. Он регулирует соотношение между важностью ограничения на вторую производную и важностью условий, заданных самим уравнением. То есть, чем меньше параметр регуляризации, тем точнее соответствует решению уравнению (но оно может оказаться нефизическим), а чем больше параметр регуляризации, тем глаже функция (но она может перестать удовлетворять уравнению с хорошей точностью). Поэтому для нахождения наилучшего решения надо минимизировать функционал  $C$  при различных параметрах регуляризации, а затем посмотреть, какое из полученных решений  $g(\lambda)$  минимизирует исходный функционал  $C_0$  (без регуляризации). То есть надо понять, при каком значении  $\lambda$  решение уравнения получается ближе всего к истине.

### *Преобразование Фурье*

Итак, вопрос заключается в том, как именно мы будем решать задачу минимизации функционала  $C$ . Идея состоит в том, чтобы решить задачу в Фурье-пространстве. Согласно равенству Парсеваля, преобразование Фурье не меняет  $L_2$  норму функции (как раз ту, что мы используем). Поэтому вычислим преобразование Фурье отдельно для выражений под нормами в первом и втором слагаемом выражения (8). Воспользовавшись тем свойством, что преобразование Фурье свёртки функций равно произведению преобразований Фурье самих функций, получаем для выражения под нормой первого слагаемого:

$$\left\| \int_S dx dy K((x_0 - x, y_0 - y)) g(x, y) - B_z(x_0, y_0) \right\|_2^2 = \left\| \tilde{K}(u, v) \tilde{g}(u, v) - B_z(u, v) \right\|_2^2 \quad (10)$$

Для получения нового выражения под нормой второго слагаемого воспользуемся формулой преобразования Фурье производной (умножается на  $(i\omega)^n$ ):

$$\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \right\|_2^2 = \left\| (2\pi)^2 (u^2 + v^2) \tilde{g}(u, v) \right\|_2^2 \quad (11)$$

Коэффициент  $2\pi$  возникает вследствие преобразования Фурье по той оси, по которой не берётся производная (она ведь отдельно по  $x$  и отдельно по  $y$ ). В квадрат он возводится потому, что производная вторая.

Следующим шагом является подстановка полученных преобразований Фурье частей (10) и (11) в исследуемый функционал  $C$ . Вспомним, что норма в пространстве  $L_2$  – это просто интеграл квадрата функции по исследуемой области. Так как обе функции интегрируются по одной и той же области (по ленте), можно занести оба слагаемых под один интеграл:

$$C(g) = \int_S \left( \left( \tilde{K}(u,v) \tilde{g}(u,v) - B_z(u,v) \right)^2 + \lambda \left( (2\pi)^2 (u^2 + v^2) \tilde{g}(u,v) \right)^2 \right) du dv \quad (12)$$

Для того, чтобы найти минимум функционала (12), надо продифференцировать его по параметру (намагниченности). Поскольку границы области интегрирования не зависят от параметра (намагниченности), формула производной интеграла по параметру выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int f(x,t) dx = \int \frac{d}{dt} f(x,t) dx \quad (13)$$

Следовательно, производная всего функционала (12) запишется в виде:

$$\frac{d}{dt} C(g) = \int_S \left( 2 \left( \tilde{K}(u,v) \tilde{g}(u,v) - B_z(u,v) \right) \tilde{K}(u,v) + 2\lambda (2\pi)^4 (u^2 + v^2)^2 \tilde{g}(u,v) \right) du dv = 0 \quad (14)$$

Равенства можно достичь, приравняв нулю подынтегральное выражение. Теперь можно просто поделить правую часть на левую. Именно для этого и вычислялось преобразование Фурье, превратившее свёртку в произведение функций:

$$\tilde{g}(u,v) = \frac{|\tilde{K}(u,v)|^2 B_z(u,v)}{|\tilde{K}(u,v)|^2 + \lambda (2\pi)^4 (u^2 + v^2)^2 \tilde{K}(u,v)} \quad (14)$$

Теперь надо вычислить намагниченность  $g$  в диапазоне значений параметра регуляризации  $\lambda$ . Надо найти значение  $\lambda$ , которое минимизирует функционал  $C_0$  (без регуляризационной добавки). Соответствующее ему значение  $g$  и будет искомой намагниченностью. Чтобы по ней вычислить компоненты плотности тока, надо вычислить градиент по определению намагниченности.

### Апробирование

Для проверки алгоритма требовалось вручную задать модельное распределение тока. Оно должно было удовлетворять двум условиям: ток должен был быть замкнут (закон сохранения заряда) и плотность тока не должна была резко изменяться. В частности, этим условиям удовлетворяет плотность тока, распределённая радиально по Гауссу. Её компоненты по осям запишутся следующим образом (см. Рис. 1):

$$j_x = j_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad j_y = j_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (15)$$

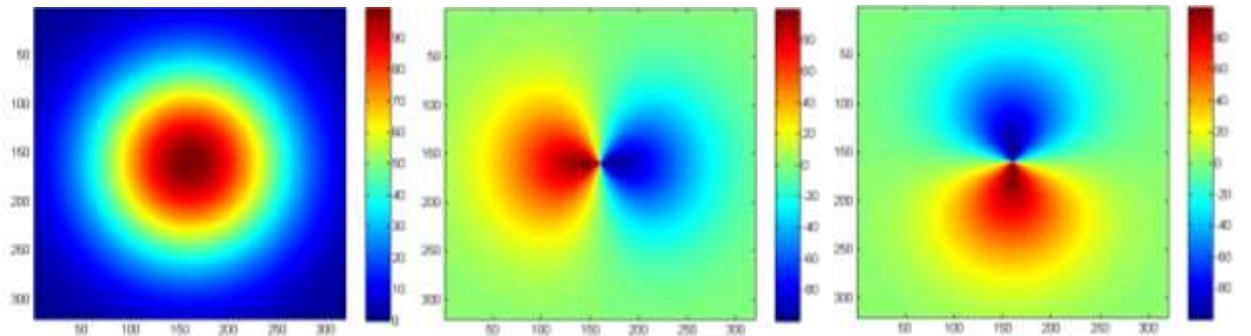


Рис. 1. (a) модельная плотность тока; (b) её x-компонента; (c) её y-компонента.

Таким образом, у нас есть модельный объект с характерным размером  $D = 2\sigma$ . Для проверки алгоритма мы вычисляли магнитное поле модельной плотности тока по закону Био-Савара-Лапласа. Затем плотность тока восстанавливалась по описанному алгоритму. После этого мы вычисляли кросскорреляцию исходного и полученного распределений плотности тока. Она использовалась для оценки эффективности алгоритма. Исследовалась зависимость этой корреляции от таких параметров, как высота датчика магнитного поля над поверхностью образца, шаги сканирования по осям  $x$  и  $y$ , а также размер области сканирования. Было показано, что для 95% корреляции распределений исходной и восстановленной плотностей тока требуется выполнение следующих условий:

- Отношение шага сканирования к характерному размеру не должно превышать  $\frac{1}{4}$  (см. Рис. 2а).
- Размер области сканирования не должен быть меньше размера ВТСП ленты (см. Рис. 2b).
- Ошибка определения высоты не должна превышать 50% (см. Рис. 3а).
- Отношение шагов сканирования не влияет на корреляцию, пока эти шаги не превышают  $\frac{1}{4}$  характерного размера (см. плато на Рис. 3b).

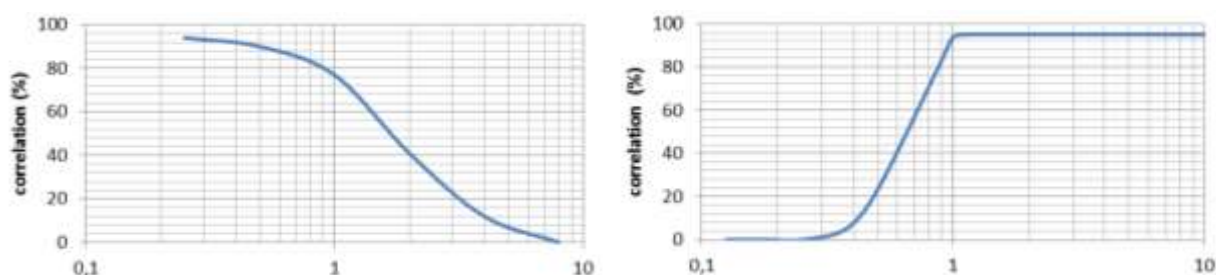


Рис. 2. (а) отношение шага сканирования к характерному размеру; (b) отношение размера области сканирование к размеру ленты.

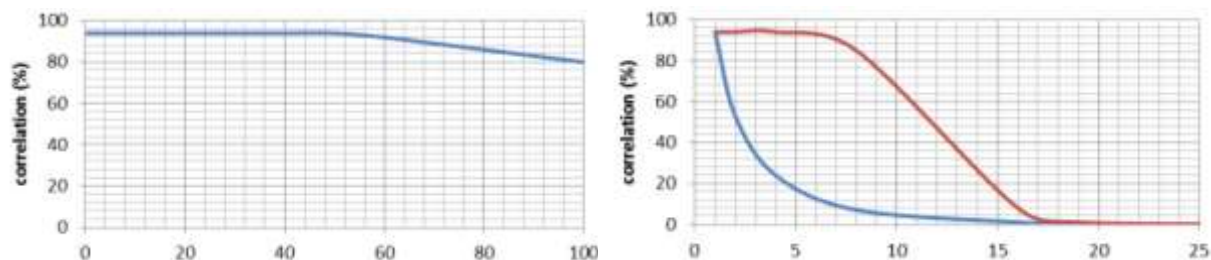


Рис. 3. (а) ошибка в определении высоты (%); (b) отношение шагов сканирования.

Оптимальные параметры были протестированы на ВТСП ленте 2 поколения компании SuNAM. Результаты представлены на Рис. 4.

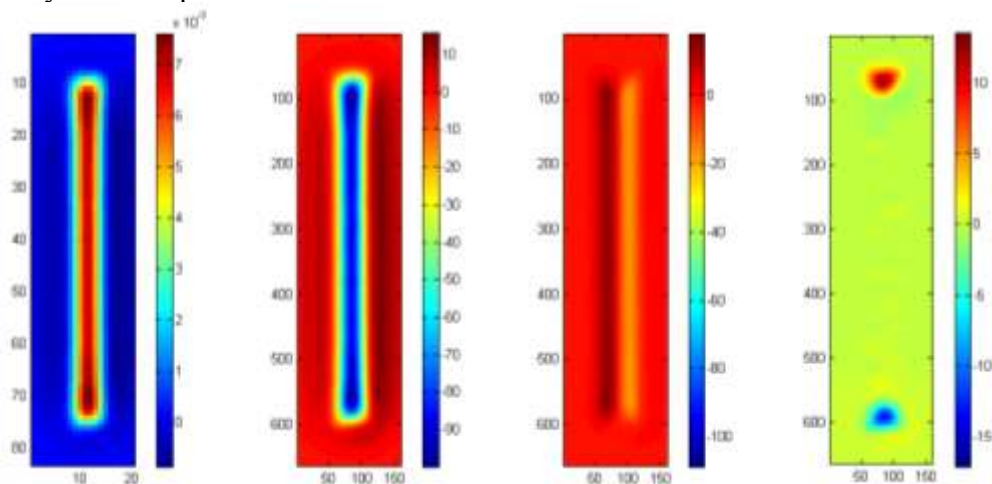


Рис. 4. (a) z-компонента магнитного поля; (b) магнетизация; (c) x-компонента плотности тока; (d) y-компонента плотности тока.

## Заключение

Успешно решена обратная задача восстановления плотности тока в ВТСП лентах поколения. Решение реализовано в среде компьютерной алгебры Matlab. Метод апробирован моделированием. Найдены оптимальные параметры для метода.

Метод готов к применению в экспериментальной работе.

## Литература

1. Cai X.Y. [et al.]. Current-limiting mechanisms in individual filaments extracted from superconducting tapes. – Nature. – 1998. – Т. 392. – №. 6679. – С. 906-909.
2. Granados X. [et al.]. Characterization of superconducting rings using an in-field Hall probe magnetic mapping system . – Applied Superconductivity, IEEE Transactions on. – 2003. – Т. 13. – №. 2. – С. 3667-3670.
3. Tikhonov A. N., Arsenin V. I. Solutions of ill-posed problems. – Vh Winston, 1977.