

Явление квазистаблизации погрешности при повторных решениях систем линейных алгебраических уравнений

Н.С. Савёлов, И.С. Лебедев

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

имени М.И. Платова

Сообщается о явлении квазистаблизации относительной погрешности при повторных решениях систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) после изменений матрицы. Это явление состоит в том, что при использовании новой модификации метода исключения Гаусса [1 – 9] погрешности повторных решений не растут с увеличением числа этих решений.

Указанная модификация характерна, во-первых, использованием дополнительной преобразуемой матрицы (ниже приведён детальный алгоритм её преобразования и даны соответствующие пояснения) при неизменной (при первоначальном решении) матрице коэффициентов СЛАУ, во-вторых, изменением алгоритма преобразования в зависимости от выбора состава искомым неизвестных, подлежащих определению, и, в-третьих, наличием алгоритмов ускоренного повторного решения систем уравнений после определённых изменений матрицы коэффициентов СЛАУ. Эти алгоритмы ориентированы на изменения отдельных столбцов матрицы, что, например, обычно имеет место при изменениях параметров элементов электрической цепи и использовании СЛАУ, составленной на основе первого и второго законов Кирхгофа. Однако эти алгоритмы эффективны и при одновременном изменении нескольких столбцов матрицы.

При анализе и синтезе электрической цепи обычно нет необходимости вычислять все токи и напряжения, а достаточно определять только некоторые из них (называемые искомыми), что существенно сокращает вычислительные затраты. Использование алгоритмов повторного решения радикально сокращает вычислительные затраты при повторном анализе и синтезе электрических цепей.

Описываемое явление подтверждено многочисленными вычислительными экспериментами для СЛАУ вида  $Ax = b$ ,  $A \in R^{n \times n}$  при  $n \leq 500$ ,  $condA \leq 10^5$  (за исключением случаев однократного увеличения  $condA$  до значения  $10^6$ ),  $k \leq 10^7$ , где  $k$  – число повторных решений. Вначале, с использованием указанной модификации, выполнялось первоначальное решение СЛАУ, а затем производились изменения матрицы  $A$  и после каждого изменения выполнялось повторное решение. Поочерёдно изменялись все столбцы матрицы (уже при  $k = n$  матрица радикально изменялась: все её столбцы уже отличались от столбцов исходной матрицы и, таким образом, осуществлялся переход к совершенно другой СЛАУ).

Программное обеспечение, использованное в вычислительных экспериментах, было написано на языке программирования C++. Применялся формат double представления чисел с плавающей точкой. Для оценки погрешности использовалась программная система MatLab R2015b.

Опишем порядок первоначального решения СЛАУ ( $\det A \neq 0$ ) с помощью указанной модификации. Процесс решения, по существу, состоит в преобразовании дополнительной матрицы, которая в исходном виде является единичной (матрица коэффициентов  $A$  при этом не изменяется). Опишем преобразование дополнительной матрицы  $F \in R^{n \times n}$ . Пусть  $a_i$  –  $i$ -й столбец матрицы  $A$ ;  $F^m, f_i^m$  – соответственно матрица  $F$  и её  $i$ -я строка после  $m$ -го преобразования,  $m = \overline{0, n}$ ,  $F^0 = E$ . Тогда  $f_i^{m+1} = f_i^m$  для  $i = m+1$  (при  $m = \overline{0, n-1}$ ), а также для  $i < m+1$  (при  $m = \overline{1, n-1}$ ) и одновременно при условии, что  $x_i$  – не искомое, не подлежащее определению;  $f_i^{m+1} = f_i^m - (f_i^m a_{m+1} / f_{m+1}^m a_{m+1}) f_{m+1}^m$  для остальных  $i$  (предполагаем, что  $f_{m+1}^m a_{m+1} \neq 0$ , иначе выполняем перестановку двух строк матрицы  $F^m$ ). Для каждого искомого  $x_i$  используем строку  $f_{i_0}$ , определяемую выражением  $f_{i_0} = (1 / (f_i^n a_i)) f_i^n$ , причём  $x_i = f_{i_0} b$ .

При условии, что все неизвестные являются искомыми, матрица  $F^r$ , составленная из строк  $f_{i_0}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , оказывается обратной к  $A$  и поэтому  $F^r A = E$ ,  $x = F^r b$ .

Теперь опишем порядок повторного решения СЛАУ. Пусть столбец  $a_i$  матрицы  $A$ , соответствующий искомому неизвестному  $x_i$ , заменён на столбец  $a_i'$  (матрица  $A$  преобразуется в матрицу  $A'$ ). При этом  $f_{i_0} a_i' = 0$  тогда и только тогда, когда  $\det A' = 0$ . Пусть  $x_j$  – другое, кроме  $x_i$ , искомое неизвестное. При  $\det A' \neq 0$  новые значения искомого неизвестных определяются выражениями

$$f_{i_0}' = (1 / (f_{i_0} a_i')) f_{i_0}; \quad (1)$$

$$x_i' = f_{i_0}' b; \quad (2)$$

$$\text{или } x_i' = (1 / (f_{i_0} a_i')) x_i; \quad (3)$$

$$f_{j_0}' = f_{j_0} - (f_{j_0} a_i') f_{i_0}'; \quad (4)$$

$$x_j' = f_{j_0}' b; \quad (5)$$

$$\text{или } x_j' = x_j - (f_{j_0} a_i') x_i'. \quad (6)$$

Если столбцы матрицы  $A$  изменяются поочерёдно (в вычислительных экспериментах происходило до 10 миллионов изменений), причём при изменении очередного столбца сохраняются значения других столбцов, имевшие место непосредственно перед рассматриваемым изменением, то используются формулы (1), (2), (4), (5).

Если один из столбцов изменяется многократно при остальных неизменных столбцах, то для экономии вычислительных затрат применяют формулы (3) и (6).

Вычислительные эксперименты проводились при использовании формул (1), (2), (4), (5) (особенности применения формул (3) и (6) здесь не рассматриваются, так как в этом случае погрешность всегда мала и не зависит от числа изменений некоторого столбца).

Вычислительные эксперименты проводились для исходной СЛАУ, составленной по законам Кирхгофа для конкретной электрической цепи ( $n = 16$ ), и для многих исходных СЛАУ, матрицы и столбцы правых частей которых формировались с использованием псевдослучайных чисел (для  $n = 50, 100, 500$ ).

Повторные решения выполнялись в следующем порядке: с помощью генератора псевдослучайных чисел изменялся первый столбец матрицы  $A$  и по формулам (1), (2), (4), (5) выполнялось повторное решение, затем аналогично изменялся второй столбец, при сохранении изменённого значения первого столбца, и выполнялось следующее повторное решение и т.д. После изменения последнего столбца матрицы цикл изменений повторялся. Для  $n \leq 100$  общее число изменений матрицы, после которых выполнялись повторные решения, составляло  $10^7$ , для  $n = 500$  оно составляло  $10^5$ .

Если после изменения столбца оказывалось, что  $condA > 10^5$ , то, за исключением случая однократного увеличения  $condA$ , осуществлялся возврат к предыдущему значению этого столбца и его изменение с помощью генератора псевдослучайных чисел повторялось до тех пор, пока не выполнялось условие  $condA \leq 10^5$ .

В экспериментах с однократным увеличением  $condA$  после  $k = n - 1$  генератор псевдослучайных чисел осуществлял изменение  $n$ -го столбца до выполнения равенства  $condA \geq 10^6$ . Затем изменялись следующие столбцы (при  $condA \leq 10^5$ ).

В каждом эксперименте не наблюдалась тенденция к росту погрешности при увеличении  $k$ . Погрешность не превышала значения  $10^{-9}$ , если после каждого изменения выполнялось условие  $condA \leq 10^5$ . С ростом  $condA$  (при  $condA \leq 10^5$ ) погрешность увеличивалась (но не превышала значения  $10^{-9}$ ), а после уменьшения  $condA$  она уменьшалась. При уменьшении числа искомых неизвестных погрешность уменьшалась. После однократного увеличения  $condA$  ( $condA \geq 10^6$ ) погрешность заметно увеличивалась, но затем вновь

существенно уменьшалось. Это свидетельствует об устойчивости алгоритма повторного решения.

Приведём характерные графики зависимости относительной погрешности  $\delta$  решения СЛАУ и нормы вектора невязки  $\omega$  от числа  $k+1$  (на единицу большего числа повторных решений, что позволяет применить логарифмический масштаб; значение  $k+1=1$  соответствует первоначальному решению).

На рис. 1 изображён график, соответствующий следующим условиям:  $n = 50$ , все неизвестные – искомые.

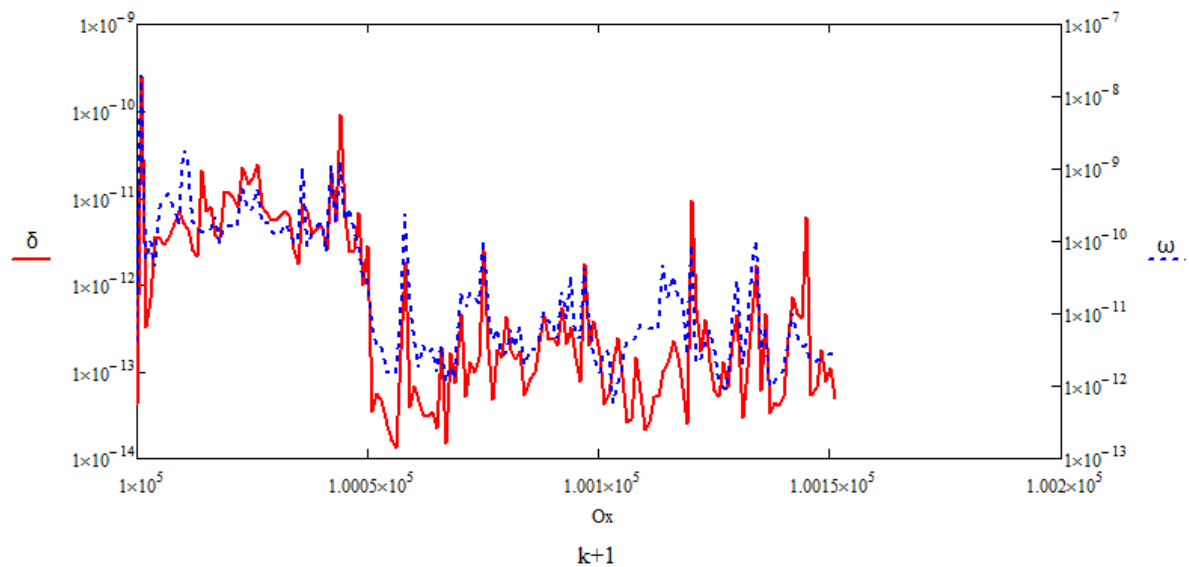


Рис.1. Характер изменения относительной погрешности и нормы вектора невязки при повторных решениях при однократном скачкообразном увеличении  $condA$ ,  $n = 50$

Относительная погрешность (которая соответствует левой вертикальной оси) определялась по выражению  $\delta = \frac{\|x^1 - x^2\|_2}{\|x^2\|_2}$ , где  $x^1$  – столбец решения, полученный с помощью разработанного программного обеспечения, реализующего модификацию метода исключения Гаусса;  $x^2$  – столбец решения, полученный с помощью программной системы MatLab R2015b.

На правой вертикальной оси указаны значения нормы вектора невязки:  $\omega = \|Ax^1 - b\|_2$  (здесь  $x^1$ , как и ранее, столбец решения, полученный с помощью разработанного программного обеспечения, реализующего модификацию метода исключения Гаусса).

По горизонтальной оси указаны значения величины  $k+1$ .

При  $k+1 = 10^5 + 1$  обеспеченно однократное увеличение значения  $condA$  до величины  $3 \cdot 10^6$  (при всех остальных изменениях  $condA \leq 10^5$ ). При  $k+1 = 10^5 + 51$  произошло повторное изменение столбца, ранее вызвавшее скачок  $condA$ .

Осцилляции на графиках объясняются случайным характером изменения  $condA$ .

На рис. 2 изображён график, соответствующий следующим условиям:  $n = 100$ , все неизвестные – искомые,  $condA \leq 10^5$ , скачкообразное увеличение  $condA$  не использовалось.

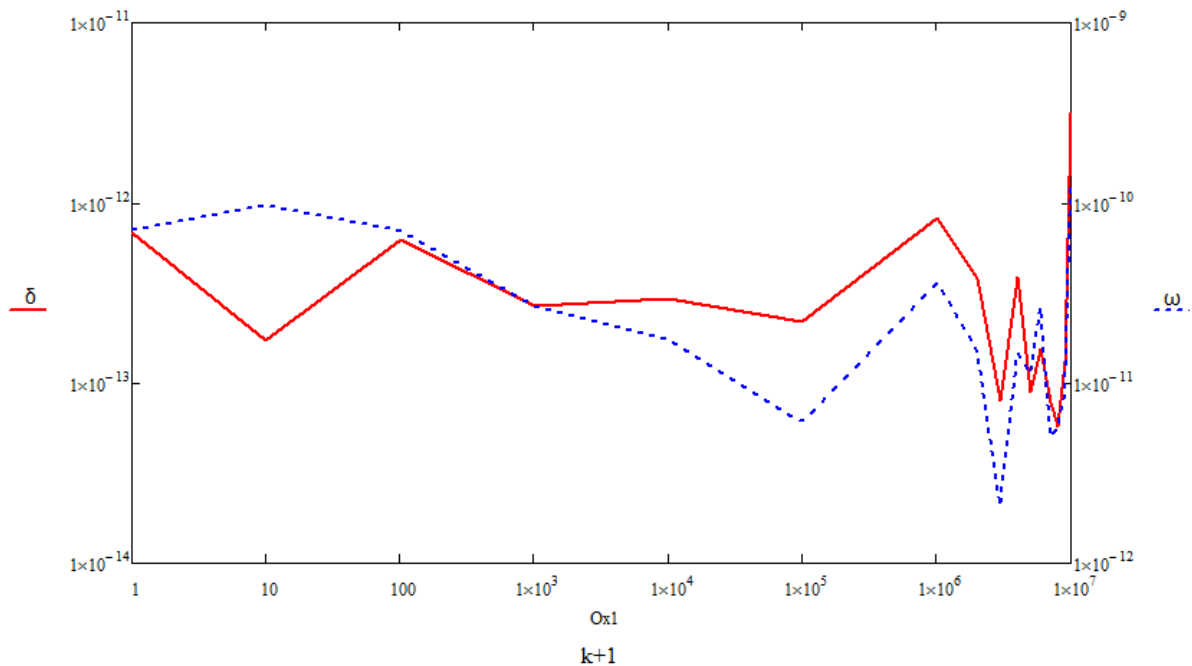


Рис. 2. Характер изменения относительной погрешности и нормы вектора невязки при повторных решениях без скачкообразного изменения  $condA$ ,  $n = 100$

На рис. 3 изображён график, соответствующий следующим условиям:  $n = 500$ , все неизвестные – искомые,  $condA \leq 10^5$ , скачкообразное увеличение  $condA$  не использовалось.

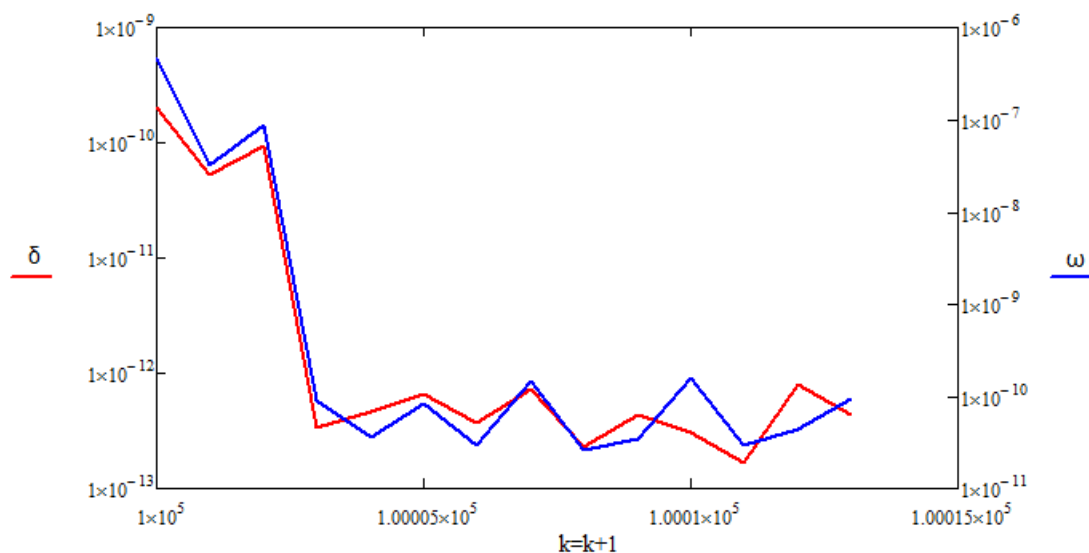


Рис.3. Характер изменения относительной погрешности и нормы вектора невязки при повторных решениях без скачкообразного изменения  $condA$ ,  $n = 500$

Из графика следует, что повторные решения привели к уменьшению погрешности по сравнению с погрешностью первоначального решения.

### Выводы

Обнаружено важное для теории и для практических вычислений, например, для параметрического синтеза электрических цепей, явление квазистабильности погрешности при повторных решениях СЛАУ при использовании новой модификации метода исключения Гаусса. Учёт того факта, что при повторных вычислениях при практически любом их числе не происходит накопление погрешности, позволяет отказаться от периодического решения СЛАУ по алгоритмам первоначального решения с целью уменьшения погрешности.

### Литература

1. Савёлов Н.С. Расчёт переходных процессов в предварительно упорядоченных электрических цепях // Изв. вузов. Электромеханика. 1985. № 4. – С.85 – 92.
2. Савёлов Н.С. Формирование уравнений состояния при изменениях в электрических цепях // Изв. вузов. Электромеханика. 1987. № 12. – С. 31 – 34.
3. Савёлов Н.С., Ревин М.С. Программная реализация метода ускоренного анализа электрических цепей // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук : тр. 50-й научной конференции МФТИ / Московский физико-технический институт (государственный университет). – Москва – Долгопрудный, 2007. – Т.2, Ч.VII: Управление и прикладная математика. – С.137 – 138.

4. *Савёлов Н.С., Лыонг С.Т.* Метод ускоренного расчёта частотных характеристик. // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук : тр. 53-й научной конференции МФТИ / Московский физико-технический институт (государственный университет). – Москва – Долгопрудный, 2010. – Т.3, Ч.VII: Управление и прикладная математика. – С.51 – 52.
5. *Савёлов Н.С., Лыонг С.Т.* Эффективный метод расчёта частотных характеристик электрических цепей // Изв. вузов. Электромеханика. 2010. № 5. – С. 31 – 34.
6. *Савёлов Н.С., Кочубей П.М.* Ускоренный анализ электрических цепей при использовании многоядерных вычислительных систем // Изв. вузов. Электромеханика. 2012. № 5. – С. 3 – 6.
7. *Савёлов Н.С., Хлынецов С.Г.* Эффективный метод параметрического синтеза электрических цепей // Изв. вузов. Электромеханика. 2013. № 5. – С. 9 – 13.
8. *Кочнев А.В., Савёлов Н.С.* Быстрое обращение матрицы индуктивностей // Изв. вузов. Электромеханика. 2015. № 1. – С. 5 – 11.
9. *Савёлов Н.С., Хлынецов С.Г.* Развитие метода синтеза электрических цепей // Изв. вузов. Электромеханика. 2015. № 3. – С. 11 – 20.