УДК 519.214.6

Скорость сходимости в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко для некоторых распределений из области максимального притяжения Гумбеля

Н.Р. Попов[1], И.В. Родионов[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Стохастическая теория экстремумов, в отличие от классической теории суммирования и, в частности, центральной предельной теоремы, связана с исследованием предельных законов распределения максимума последовательности независимых случайных величин $\{\xi_n\}$:

$$P\big(M_n \le u_n(x)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x),$$

где M_n - максимум из $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, $u_n(x)$ - числовая последовательность, а $G(x)$ – искомое предельное распределение. Если рассматривать числовые последовательности, линейные по параметру $(u_n(x) = a_n x + b_n)$, то предельные распределения формируют однопараметрическое семейство (теорема Фишера-Типпета-Гнеденко [1])

$$G_\gamma(x) = \exp\left(-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right),\ \ 1+\gamma x > 0.$$

Скорость сходимости в предельной теореме Гнеденко, в отличие от ЦПТ, где соответствующий результат носит название теоремы Берри-Эссеена [2, 3], в общем случае не найдена. Целью данной работы является нахождение скорости сходимости

$$\sup_{\mathrm{x}}\left|P(M_n \le a_n x + b_n) - G_\gamma(x)\right|$$

для некоторых распределений в случае $\gamma = 0$, когда предельное распределение принимает вид $G_0(x) = e^{-e^{-x}}$. Это распределение носит название распределения Гумбеля.

В данной работе рассмотрены два семейства распределений: распределения вейбулловского типа

$$F(x) = 1 - e^{-x^\gamma}, \qquad x > 0, \gamma > 0$$

и логвейбулловского типа

$$F(x) = 1 - e^{-(\ln x)^\gamma}, x > 1, \gamma > 1.$$

Для каждого из этих семейств найдена скорость сходимости в предельной теореме Гнеденко: для вейбулловского типа скорость сходимости равна

$$\frac{A}{\ln n} < \sup_{\mathrm{x}}\left|P(M_n \le a_n x + b_n) - G_\gamma(x)\right| < \frac{B}{\ln n},$$

а для логвейбулловского типа

$$A(\ln n)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} < \sup_{\mathrm{x}}\left|P(M_n \le a_n x + b_n) - G_\gamma(x)\right| < B(\ln n)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, \gamma > 1.$$

Результат для логвейбулловского семейства представляет особый интерес – он показывает, что в этой задаче скорость сходимости может быть медленнее обратнологарифмической. Дальнейшие исследования частного случая, когда правая крайняя точка распределения

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\}$$

бесконечна, привели к результату, который неформально можно изобразить на рисунке 1.

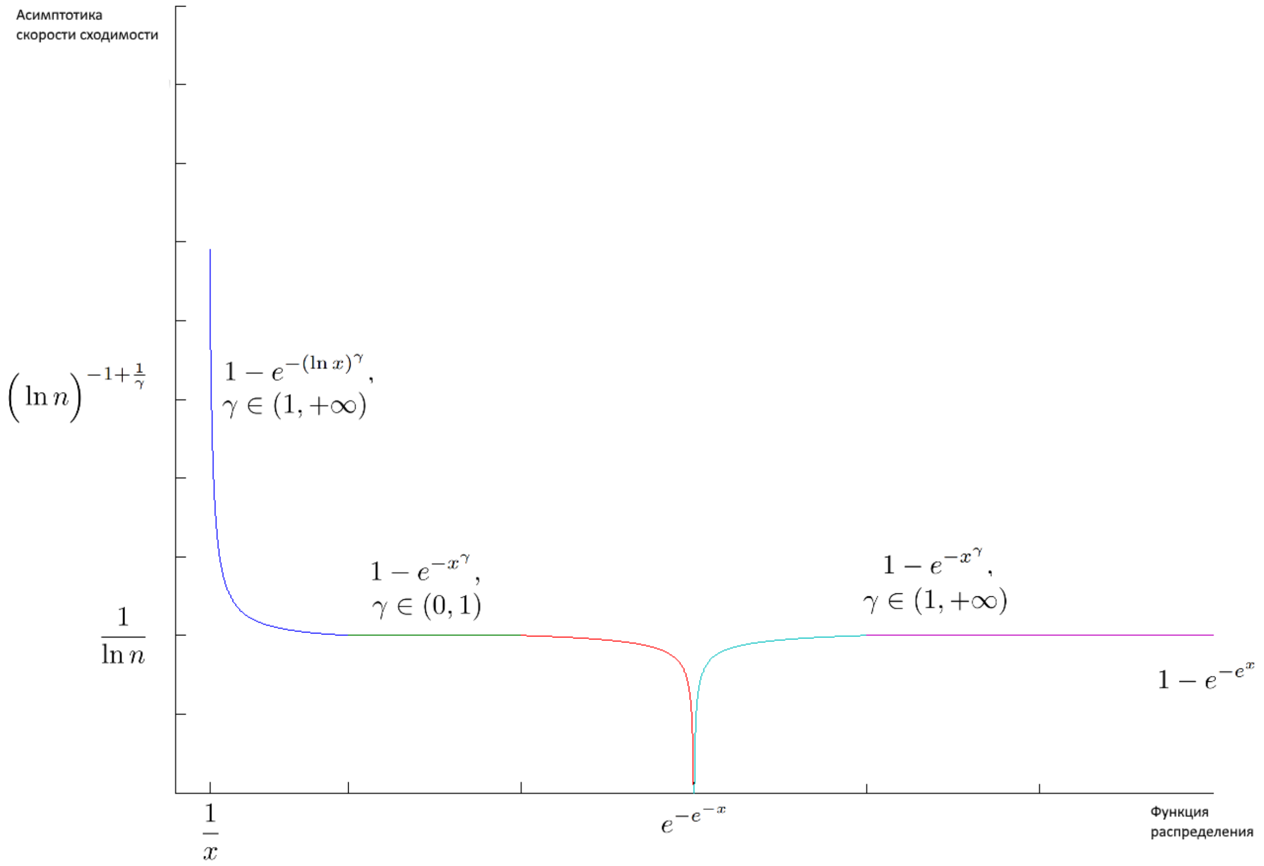

Рис. 1. Зависимость скорости сходимости от тяжести хвоста в случае $x_F = \infty$

Для полноты исследования задачи в данном частном случае остается исследовать распределения, хвосты которых попадают в область.

$$1 - F(x) = e^{-\omega(\ln x)}, e^{-o((\ln x)^{\gamma})}, \forall \gamma > 1.$$

Литература

1. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory: an introduction. // Springer Science & Business Media, 2007.
2. *Berry Andrew C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // Transactions of the american mathematical society. — 1941. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 122–136.
3. *Esseen Carl-Gustav.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability // Ark. Mat. Astr. Fys. A. — 1942. — Vol. 28, no. 9. — P. 19.