
УДК 534-18

Спектр одномерных колебаний двухкомпонентного слоистого композита с периодической структурой

В.В. Шумилова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

58-я научная конференция МФТИ

23-28 ноября 2015 г.

Обозначения:

L – толщина композита

M – число упругих (вязкоупругих) слоев

εd – толщина каждого вязкоупругого слоя

$\varepsilon(1-d)$ – толщина каждого упругого слоя

$0<\varepsilon \ll L$, $0<d<1$

I_{1m} – упругие слои: $I_{1m}=\big((m-1)\varepsilon,(m-d)\varepsilon\big)$, $m=1,\dots,M$

I_{2m} – вязкоупругие слои: $I_{2m}=\big((m-d)\varepsilon, m\varepsilon\big)$, $m=1,\dots,M$

Уравнение для упругих слоев

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x\in I_{1m}.$$

Уравнение для вязкоупругих слоев

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g_2(t)*\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x\in I_{2m}.$$

Здесь ρ_1 (ρ_2) – плотность упругого (вязкоупругого) материала; a_1 (a_2) – модуль упругости для упругого (вязкоупругого) материала; символ $*$ обозначает операцию свертки по t:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-s)f_2(s)ds.$$

После преобразования Лапласа:

$$\rho_1 \lambda^2 u = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in I_{1m}, \tag{1}$$

$$\rho_2 \lambda^2 u = (a_2 + g_2(\lambda)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in I_{2m}. \tag{2}$$

Перепишем (1), (2) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A^2 \lambda^2 u = 0, \quad x \in I_{1m}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B^2 \lambda^2 u = 0, \quad x \in I_{2m}. \tag{4}$$

Здесь

$$A = \sqrt{\rho_1 / a_1}, \quad B = B(\lambda) = \sqrt{\rho_2 / (a_2 + g_2(\lambda))}.$$

Спектральная задача:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x,\lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \lambda^2 u = 0, \quad x \in (0, L), \tag{5}$$

$$u(0,\lambda) = u(L,\lambda) = 0, \tag{6}$$

$$[u]_{x=(m-d)\varepsilon} = 0, \quad [\sigma]_{x=(m-d)\varepsilon} = 0, \quad m = 1,\dots,M, \tag{7}$$

$$[u]_{x=n\varepsilon} = 0, \quad [\sigma]_{x=n\varepsilon} = 0, \quad n = 1,\dots,M-1. \tag{8}$$

Здесь

$$\alpha(x,\lambda) = a_1 / \rho_1, \quad x \in I_{1m}; \quad \alpha(x,\lambda) = (a_2 + g_2(\lambda)) / \rho_2, \quad x \in I_{1m};$$

$$\sigma = a_1 \frac{\partial u}{\partial x}, \; x \in I_{1m}; \quad \sigma = (a_2 + g_2(\lambda)) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in I_{2m}.$$

Обозначим

$$p(x,\lambda) = \alpha(x,\lambda) \frac{\partial u}{\partial x}$$

и перепишем уравнение (5) в виде системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p}{\alpha}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \lambda^2 u.$$

Матрица этой системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\alpha(x,\lambda)} \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования фазового пространства за время ε:

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$p_{11}=\frac{1}{4}\left(K+\frac{1}{K}-\frac{a_1A}{a_2B}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(-A\lambda T_1)+\frac{1}{4}\left(K+\frac{1}{K}+\frac{a_1A}{a_2B}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(A\lambda T_1),$$

$$p_{12}=\frac{1}{4\lambda}\left(-\frac{1}{A}\left(K+\frac{1}{K}\right)+\frac{a_1}{a_2}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(-A\lambda T_1)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A}\left(K+\frac{1}{K}\right)+\frac{a_1}{a_2}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(A\lambda T_1)$$

$$p_{21}=\frac{\lambda}{4}\left(-A\left(K+\frac{1}{K}\right)+\frac{a_2}{a_1}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(-A\lambda T_1)+\frac{\lambda}{4}\left(A\left(K+\frac{1}{K}\right)+\frac{a_2}{a_1}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(A\lambda T_1),$$

$$p_{22}=\frac{1}{4}\left(K+\frac{1}{K}-\frac{a_2B}{a_1A}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(-A\lambda T_1)+\frac{1}{4}\left(K+\frac{1}{K}+\frac{a_2B}{a_1A}\left(-K+\frac{1}{K}\right)\right)\exp(A\lambda T_1).$$

Лемма. *Множество собственных значений спектральной задачи (5)-(8) совпадает с объединением множеств решений следующих M уравнений*

$$p_{12}(\lambda)=0,\quad p_{11}(\lambda)+p_{22}(\lambda)=2\cos\frac{\pi l}{M},\ \ l=1,\dots,M-1,M+1,\dots,2M-1.$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Возьмем следующие числовые данные:

$$d=0.5,\ \varepsilon=0.01,\ \ M=10,\ \rho_1=5500 \text{ кг/м}^3,\ \rho_2=2500 \text{ кг/м}^3,$$

$$a_1=2.68\cdot10^{10}\text{ Па},\ a_2=1.31\cdot10^{9}\text{ Па},$$

$$g_2(t)=-qe^{-\gamma t},\ q=1.87\cdot10^{11}\text{ Па·с}^{-1},\ \gamma=400\text{ с}^{-1}.$$

Спектр усредненной задачи есть объединение корней кубических уравнений

$$\lambda^3+\xi_1\lambda^2+\alpha_1C_k\lambda+(\alpha_1\xi-q_1)C_k=0,\ \ C_k=\frac{\pi k^2}{\rho_0 l^2}$$

для всех $k\in\mathbb{N}$. Здесь

$$\alpha_1=1.5\cdot10^{9}\text{ Па},\ q_1=3.39\cdot10^{11}\text{ Па·с}^{-1},\ \xi=\gamma-\frac{q(1-d)}{a_1d+a_2(1-d)}=393.36\text{ с}^{-1}.$$

Усредненный спектр: $\{\lambda_{1k}\}$, $\{A_k + B_k i\}$, $\{A_k - B_k i\}$. Для $k = 1,\ldots,5$:

	λ_{1k}	A_k	B_k
$k=1$	–257.521	–67.919	24825.25
$k=2$	–257.51	–67.925	49651.69
$k=3$	–257.508	–67.926	74477.86
$k=4$	–257.5073	–67.926	99303.97
$k=5$	–257.5069	–67.926	124130.05

Точный спектр есть объединение корней 10 уравнений

$$p_{12}(\lambda) = 0, \quad p_{11}(\lambda) + p_{22}(\lambda) = 2\cos\frac{\pi m}{10}, \; m = 1,\ldots,9,$$

где p_{ij} – коэффициенты матрицы преобразования фазового пространства за время ε.

Вещественные собственные значения

(∗) Внутри окружности радиуса 0.0001 с центром в точке λ_1=–257.521 уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри окружности радиуса 0.0001 с центром в точке λ_2=–257.51 уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(2\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри окружности радиуса 0.0001 с центром в точке λ_3=–257.508 уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(3\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри окружности радиуса 0.0001 с центром в точке λ_4=–257.5073 уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(4\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри окружности радиуса 0.0002 с центром в точке λ_5=–257.5069 уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(5\pi/10)$ имеет корень.

Комплексные собственные значения

(∗) Внутри эллипса с $a=1$, $b=44$ и центром в точке λ_6=–67.919+24825.25i уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри эллипса с $a=1$, $b=350$ и центром в точке λ_7=–67.925+49651.69i уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(2\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри эллипса с $a=1$, $b=1250$ и центром в точке λ_8=–67.926+74477.86i уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(3\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри эллипса с $a=2$, $b=3100$ и центром в точке λ_9=–67.926+99303.97i уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(4\pi/10)$ имеет корень.

(∗) Внутри эллипса с $a=3$, $b=6200$ и центром в точке λ_{10}=–67.926+124130.05i уравнение $p_{11} + p_{22} = 2\cos(5\pi/10) = 0$ имеет корень.
