

Задачи управления системами с “памятью” и негармонический анализИ.В. Романов^{1,2}, А.С. Шамаев^{3,4}¹Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики²Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова³Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского⁴Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассматривается задача точного управления системой, описываемой некоторым уравнением с интегральной “памятью”. Доказывается, что данную систему можно (при определенных условиях) привести в состояние покоя за конечное время с помощью распределенного управляющего воздействия, ограниченного по абсолютной величине. Также, в одномерном случае, для задачи граничного управления получена оценка снизу для времени оптимального быстрогодействия. Рассматриваются различные типы ядер, содержащихся в интегральном члене уравнения, показана взаимосвязь в вопросах управляемости некоторыми гиперболическими и параболическими системами.

Рассмотрим проблему управления, заданную интегро-дифференциальным уравнением

$$\theta_t(t, x) - \int_0^t K(t-s)\Delta\theta(s, x)ds = u(t, x), \quad (1)$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\theta|_{t=0} = \xi(x), \quad (2)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей, $K(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, $K(0) = p > 0$ и $u(t, x)$ – управление, распределенное (по x) в области Ω .

Ядро $K(t)$ может быть представлено, например, как сумма убывающих экспоненциальных функций:

$$K(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{-\gamma_j t}, \quad (4)$$

где c_j, γ_j заданные положительные константы. Уравнения с ядрами такого типа встречаются в задачах теплофизики, вязкоупругости и в механике гетерогенных сред. Для краткости будем писать $\theta(t)$ и $u(t)$ вместо $\theta(t, x)$ и $u(t, x)$ соответственно.

Имеется в виду, что $\theta(t)$, $u(t)$ функции от t со значениями в некотором гильбертовом пространстве. Цель управления привести механическую систему в покой за конечное время.

Будем говорить, что рассмотренная выше система *управляема*, если для каждого начального условия ξ найдется управление u с компактным носителем (по t), такое что $|u(t, x)| \leq \varepsilon$, для которого соответствующее решение $\theta(t)$ поставленной задачи также имеет компактный носитель (по t).

Ранее вопросы управляемости для системы (1) – (3) рассматривались, например, в работах [1], [2], а также многих других.

Пусть $\{-\lambda_k^2\}_{k=1}^{+\infty}$ – собственные значения оператора Лапласа в области Ω . Рассмотрим функцию комплексного переменного $P(\lambda) = \lambda + \lambda_k^2 \hat{K}(\lambda)$, где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $K(t)$. Если $P(\lambda)$ имеет ровно два различных нуля первого порядка с неположительными вещественными частями и выполнены некоторые дополнительные условия, то доказываем, что система (1) – (3) управляема.

Далее рассматривается следующая одномерная задача граничного управления:

$$\theta_t(t, x) - \int_0^t K(t-s)\theta_{xx}(s, x)ds = 0, \quad (5)$$

$$t > 0, \quad x \in (0, \pi),$$

$$\theta|_{t=0} = \xi(x), \quad (6)$$

$$\theta(t, 0) = v(t), \quad \theta(t, \pi) = 0. \quad (7)$$

Требуется найти такое управление $v(t) \in L_2(0, +\infty)$ (с компактным носителем), приложенное к левому концу отрезка $[0, \pi]$, чтобы соответствующее решение $\theta(t)$ также имело компактный носитель по t .

Для времени оптимального быстрогодействия T^* в задаче (5) – (7) устанавливается оценка снизу, т. е. $T^* \geq a^*$, где a^* некоторое число, которое вычисляется на основе информации о множестве всех корней уравнений $\lambda + k^2 \hat{K}(\lambda) = 0$ при каждом натуральном k .

Литература

1. Romanov I., Shamaev I., Exact Controllability of the Two-Dimensional Distributed System Governed by Integrodifferential Equation. – Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". – 2014. – No. arXiv: 1408.0382.

2. Ivanov S., Pandolfi L. Heat equation with memory. Lack of controllability to rest. - J. Math. Anal. Appl. – 2009. – № 355. – P. 1-11.