

# Параметрические неустойчивости в магнитной гидродинамике астрофизической плазмы в приближении мелкой воды

Климачков Д.А.<sup>1,2</sup>, Петросян А.С.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, 117997, Москва, ул. Профсоюзная 84/32

## Аннотация

В работе рассматривается вращающиеся магнитогидродинамические течения тонкого слоя астрофизической плазмы со свободной границей в вертикальном внешнем магнитном поле. Мы используем приближение мелкой воды. Наличие вертикального внешнего магнитного поля существенно изменяет динамику волновых процессов в астрофизической плазме: в отличие от нейтральной жидкости и слоя плазмы в тороидальном магнитном поле. В рассматриваемом случае имеют место трехволновые нелинейные взаимодействия. Асимптотическим методом многомасштабных разложений выведены нелинейные уравнения взаимодействия волновых пакетов: взаимодействие трех магнито-Пуанкаре волн, взаимодействие трех магнитострофических волн, взаимодействие двух магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, а также двух магнитострофических и одной магнито-Пуанкаре волн. Предсказано существование распадных неустойчивостей и явлений параметрического усиления. Найдено, что существуют следующие типы распадных неустойчивостей: магнито-Пуанкаре волна распадается на две магнито-Пуанкаре волны, магнитострофическая волна распадается на две магнитострофические волны, магнито-Пуанкаре волна распадается на одну магнито-Пуанкаре волну и одну магнитострофическую, магнитострофическая волна распадается на одну магнитострофическую и одну магнито-Пуанкаре волну. Показано что имеются следующие механизмы параметрического усиления: параметрическое усиление магнито-Пуанкаре волн, параметрическое усиление магнитострофических волн, а также усиление магнито-Пуанкаре волны в поле магнитострофической и усиление магнитострофической волны в поле магнито-Пуанкаре волны. Найдены инкременты неустойчивостей и коэффициенты параметрического усиления для соответствующих процессов.

# 1 Введение

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1], динамика атмосфер нейтронных звезд [2], течения аккрецирующей материи в нейтронных звездах [3], захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами [4], [5], [6]. Для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [7] и квазигеострофическое приближение в магнитной гидродинамике [7], [8], [9]. Настоящая работа посвящена изучению слабонелинейных волновых взаимодействий в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Уравнения вращающейся магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи, и вертикальными ускорениями можно пренебречь. Рассматривается слой несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью, находящийся в поле сил тяжести, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с плазмой. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются из классических уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы осреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи [7], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. В линейном приближении система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды имеет решения, описывающие магнитогравитационные (или волны Пуанкаре магнитной гидродинамики) волны и магнитострофические волны. В случае гидродинамики нейтральной жидкости в приближении мелкой воды присутствуют только гравитационные волны Пуанкаре. Закон дисперсии волн Пуанкаре и нелинейность в уравнениях мелкой воды нейтральной жидкости в случае слабонелинейных волн конечной амплитуды исключают взаимодействие волн Пуанкаре [17], поскольку в этом случае не выполняются условия синхронизма для таких волн. В случае течений солнечного тахоклина присутствует тороидальное магнитное поле. Наличие тороидального поля в стационарном случае приводит к возникновению двух типов волн: быстрых магнитогравитационных волн, аналогичных волнам Пуанкаре нейтральной жидкости, называемых магнито-Пуанкаре, и медленных "альфвеновских". В системе с тороидальным магнитным полем закон дисперсии не обеспечивает условий синхронизма для случая слабонелинейных взаимодействий [1], [7], [10]. В настоящей работе мы изучаем магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Такая конфигурация магнитного поля характерна для нейтронных звезд [2], [6] и для экзопланет [6].

В этом случае в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды появляются дополнительные слагаемые, описывающие в линейном приближении два типа быстрых волн: волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны [2]. Настоящая работа является обобщением линейной теории магнитогидродинамических течений мелкой воды, развитой в [2], на случай волн конечной амплитуды в приближении слабой нелинейности. В нашей работе показано, что закон дисперсии линейных волн во внешнем вертикальном магнитном поле обеспечивает условия синхронизма, необходимые для нелинейных взаимодействий. В отсутствие же внешнего вертикального магнитного поля, исчезают магнитострофические волны и остаются только гравитационные волны Пуанкаре в гидродинамике нейтральной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей. Мы исследуем взаимное влияние волновых пакетов во вращающейся магнитной гидродинамике мелкой воды. Анализ вида дисперсионных соотношений для обоих мод показал, что возможны несколько видов трехволновых взаимодействий: три магнито-Пуанкаре волны, три магнитострофические волны, а также межмодовые взаимодействия: две магнито-Пуанкаре волны и магнитострофическая волна, две магнитострофические волны и магнито-Пуанкаре волна. Для описания нелинейного взаимодействия волн использован асимптотический метод многомасштабных разложений [18]. Для всех четырех случаев получены нелинейные уравнения взаимодействия амплитуд волн. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия, показал существование двух типов неустойчивостей: распадная неустойчивость и параметрическое усиление волн [19], [20]. Найдено, что существуют следующие четыре типа распадных неустойчивостей: магнито-Пуанкаре волна распадается на две магнито-Пуанкаре волны, магнитострофическая волна распадается на две магнитострофические волны, магнито-Пуанкаре волна распадается на одну магнито-Пуанкаре волну и одну магнитострофическую, магнитострофическая волна распадается на одну магнитострофическую и одну магнито-Пуанкаре волну. Получены инкременты найденных распадных неустойчивостей. Исследованы также следующие четыре механизма параметрического усиления волн: параметрическое усиление магнито-Пуанкаре волн, параметрическое усиление магнитострофических волн, а также усиление магнито-Пуанкаре волны в поле магнитострофической и усиление магнитострофической волны в поле магнито-Пуанкаре волны. Для всех видов неустойчивостей найдены коэффициенты параметрического усиления.

В разделе 2 приведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды в поле силы тяжести на ровной границе при наличии вращения, воспроизведены линейные решения этой системы в виде, удобном для дальнейшего анализа нелинейных эффектов. Проанализированы дисперсионные кривые и сделаны выводы о наличии синхронизмов, обеспечивающих возможность трехволновых взаимодействий в конечноамплитудном приближении слабой нелинейности.

В разделе 3 описана процедура асимптотического метода многомасштабных разложений. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд

трехволновых взаимодействий волновых пакетов магнитной гидродинамики мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле.

В разделе 4 полученные уравнения трехволновых взаимодействий используются для анализа физических эффектов слабонелинейного взаимодействия магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Проанализированы распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. В разделе 5 сформулированы результаты работы.

## 2 Качественный анализ магнитогидродинамических течений астрофизической плазмы в приближении мелкой воды

В данном разделе приведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе, описывающая течения слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести при наличии вращения [7], выписаны линейные решения [1] этой системы. Полученные линейные решения используются для качественного анализа дисперсионных кривых линейных волн и получении условий синхронизма, обеспечивающих возможность межволнового взаимодействия.

Запишем систему магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(h v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x^2 - B_x^2))}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y} + B_0 B_x = 2\omega h v_y \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(h v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_y^2 - B_y^2))}{\partial y} + g h \frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_x = 2\omega h v_x \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(h B_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_x v_y - B_y v_x))}{\partial y} + B_0 v_x = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(h B_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_y v_x - B_x v_y))}{\partial x} + B_0 v_y = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial h B_x}{\partial x} + \frac{\partial h B_y}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

В системе (2.1-2.5)  $h$  - высота свободной поверхности,  $v_x, v_y$  - горизонтальные скорости в приближении мелкой воды в плоскости  $xy$  соответственно,  $B_x, B_y$  - горизонтальные компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды в направлении  $x$  и  $y$  соответственно,  $B_0$  - внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости  $xy$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения магнитной жидкости. Первое уравнение системы (2.1-2.5) - уравнение непрерывности, второе и третье - закон сохранения импульса, четвертое и пятое уравнения - уравнения переноса магнитного поля, уравнение (2.6) -

следствие уравнения бездивергентности магнитного поля в полной системе исходных уравнений магнитной гидродинамики, используемое для задания корректных начальных условий.

Система уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды над ровной границей получается из полной системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной для слоя жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в системе координат, где ось  $z$  направлена вдоль вектора силы тяжести и противоположна ему по направлению. В предположении малости толщины слоя и гидростатичности распределения полного давления (суммы гидродинамического и магнитного) проводится усреднение системы по глубине слоя жидкости. При усреднении пренебрегается квадратами отклонения скоростей и магнитного поля от усредненных по глубине величин. [12], [11], [13], [16]. Дисперсионное уравнение линейных волн исходной системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле  $B_0$  имеет вид:

$$\omega^5 - \omega^3(ghk^2 + f^2 + 2(\frac{B_0}{h})^2) + (\frac{B_0}{h})^2(ghk^2 + (\frac{B_0}{h})^2)\omega = 0 \quad (2.7)$$

В нашем случае из-за наличия вертикального поля возникают два типа волн. Первый тип волн является обобщением линейных волн Пуанкаре с дисперсионным уравнением:

$$\omega_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + (\frac{B_0}{h})^2 + \frac{1}{2}\sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4(\frac{B_0}{h})^2)}} \quad (2.8)$$

в котором знак  $+$  соответствует волне, распространяющейся вдоль  $\mathbf{k}$ , а знак  $-$  - волну, распространяющуюся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}$ . Будем называть полученные линейные решения волнами магнито-Пуанкаре. Второй тип линейных решений описывает магнитострофические волны, не имеющие аналога в нейтральной жидкости, и имеет дисперсионное соотношение:

$$\omega_{2,4} = \pm \sqrt{\frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + (\frac{B_0}{h})^2 - \frac{1}{2}\sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4(\frac{B_0}{h})^2)}} \quad (2.9)$$

в котором со знаком  $+$  - волна, распространяющаяся вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , а знак  $-$  соответствует волне, распространяющейся в направлении, противоположном вектору  $\mathbf{k}$ . Индексы 1, 2 соответствуют волнам, распространяющимся вдоль  $\mathbf{k}$ , а индексы 3, 4 соответствуют волнам, распространяющимся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}$  для удобства рассмотрения нелинейных взаимодействий. Общее решение системы представляет собой сумму четырех линейных волн.

Общий вид дисперсионных кривых для случая с  $\omega > 0$  представлен на рисунке 1. Верхняя кривая - магнито-Пуанкаре мода, нижняя кривая - магнитострофическая мода. По вертикали отложена частота  $\omega$ , по горизонтали

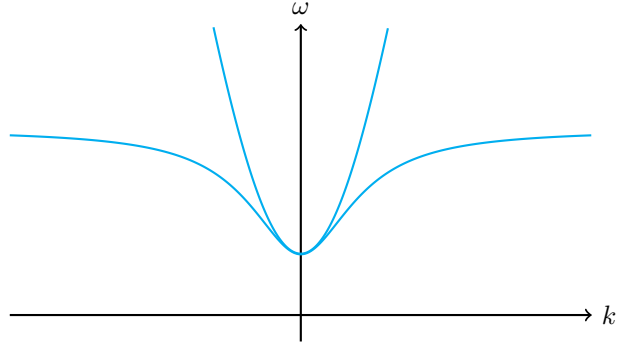


Рис. 1: Дисперсионные кривые. Верхняя - Пуанкарэ мода, нижняя - магнито-строфическая

-  $k_x$ , когда дисперсионный вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $x$ . Дисперсионное соотношение  $\omega(\mathbf{k})$  задает дисперсионную поверхность  $\omega(k_x, k_y)$ . Эта поверхность есть поверхность вращения, так как дисперсионное соотношение симметрично относительно  $k_x$  и  $k_y$ . Для  $\omega < 0$  (то есть решений  $\omega_3$  и  $\omega_4$ ) дисперсионная поверхность симметрична относительно плоскости  $\omega = 0$ . Для того, чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для описанных типов волн, необходимо проанализировать их дисперсионные соотношения, определить асимптотику дисперсионных кривых для обоих типов волн. Условие синхронизма, необходимое для возникновения взаимодействия между волнами с разными волновыми векторами и разными волновыми частотами в общем случае имеет вид  $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Изобразим это условие на графике. Первое слагаемое задает точку  $(k_1, \omega(k_1))$  на дисперсионной кривой одного из решений, второе слагаемое - точку  $(k_2, \omega(k_2))$  на дисперсионной кривой другого решения, и если вторая дисперсионная кривая, смещенная относительно начала координат на  $(k_1, \omega(k_1))$ , пересечет первую в некоторой точке  $(k_3, \omega(k_3))$ , то это и будет означать существование такого  $k_2$ , что условие синхронизма выполнится.

Для магнито-Пуанкарэ волн условие синхронизма запишется в виде  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ , где индекс 1 означает прямую магнито-Пуанкарэ волну. При малых частотах дисперсионные поверхности для Пуанкарэ моды построенные над плоскостью  $k_x, k_y$  являются выпуклыми. На рисунке 2 показано, что кривая  $\omega_1(k_x)$  и кривая  $\omega_1(k_x - k_{x1}) + \omega_1(k_{x1})$  (второе слагаемое в условии синхронизма) могут пересекаться, а значит и поверхность  $\omega_1(\mathbf{k})$  и поверхность  $\omega_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_1)$  могут пересекаться вдоль некоторой кривой. Точки пересечения отвечают волне магнито-Пуанкарэ с частотой, равной сумме частот, и волновым вектором, равным сумме волновых векторов двух первых волн. Это означает, что условие синхронизма выполняется для трех магнито-Пуанкарэ волн, поэтому возможно их нелинейное взаимодействие.

Условие синхронизма для трех магнито-строфических волн имеет вид

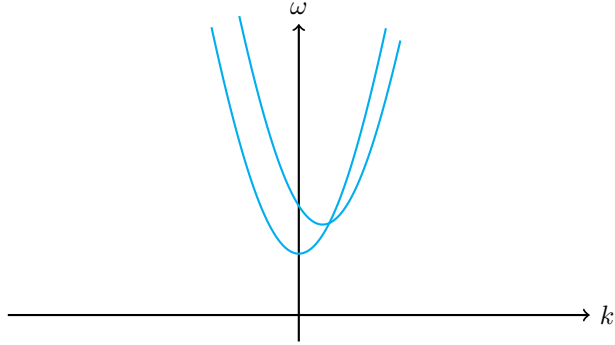


Рис. 2: Пересечение дисперсионных кривых магнито-Пуанкаре моды

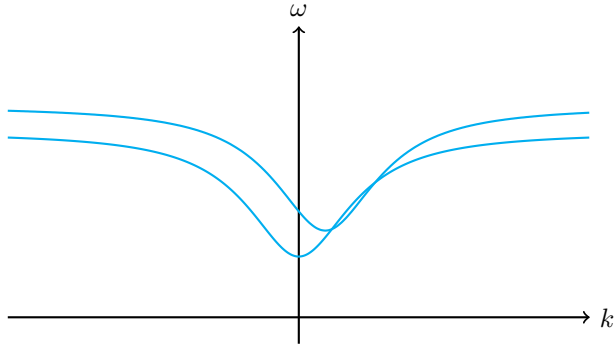


Рис. 3: Пересечение дисперсионных кривых магнитострофической моды

$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Нижний индекс 2 относится к магнитострофической моде. Для того чтобы понять, может ли реализоваться такое условие, обратимся к рисунку 3, на котором нижняя кривая -  $\omega_2(k_x)$  определяет первое слагаемое в условии синхронизма, верхняя кривая  $\omega_2(k_x - k_{x1}) + \omega_2(k_{x1})$  описывает второе слагаемое, а наличие пересечения говорит о пересечении дисперсионных поверхностей, то есть существуют такие  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ , что условие синхронизма выполняется.

В случае взаимодействия одной магнитострофической и одной магнито-Пуанкаре волн, может получиться магнитострофическая волна со следующим условием:  $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  (рисунок 4), или может получиться магнито-Пуанкаре волна, причем условие синхронизма:  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  (рисунок 5). В обоих случаях наличие пересечения поверхностей, означает существование таких  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ , при которых условия будут выполнены и может иметь место трехволновое взаимодействие.

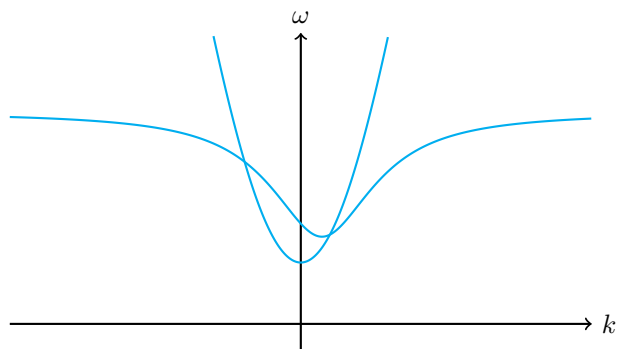


Рис. 4: Пересечение дисперсионных кривых магнито-строфической и магнито-Пуанкаре мод

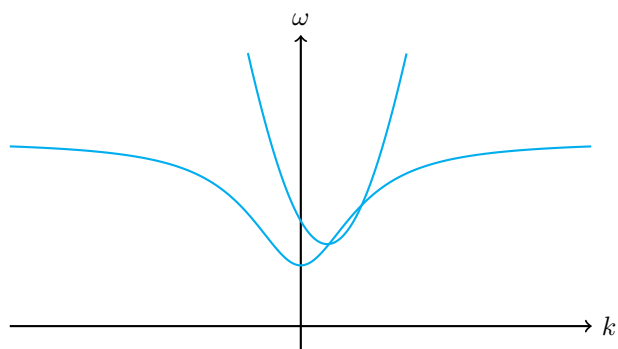


Рис. 5: Пересечение дисперсионных кривых магнито-Пуанкаре и магнито-строфической мод



### 3 Уравнения трехволновых взаимодействий в магнитной гидродинамике астрофизической плазмы в приближении мелкой воды

Для исследования нелинейных эффектов используем асимптотический метод многомасштабных разложений [18], [21]. Решение исходной системы (2.1-2.5)  $\mathbf{u} = (h, v_x, v_y, B_x, B_y)$  представим в виде ряда по малому параметру  $\epsilon$ :

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_0 + \epsilon^2 \mathbf{u}_1 + \dots \quad (3.1)$$

Где  $\mathbf{u}_0$  - линейное решение исходной системы (2.1-2.5),  $\mathbf{u}_1$  - слагаемое, описывающее влияние квадратичной нелинейности. Выписывая слагаемые, пропорциональные  $\epsilon^2$ , получим систему линейных неоднородных уравнений на  $\mathbf{u}_1$ , содержащую в правой своей части вековые слагаемые, приводящие к линейно растущим по времени решениям. Это приводит к нарушению условия  $\epsilon \mathbf{u}_1 \ll \mathbf{u}_0$  на больших масштабах. Поэтому для получения нелинейной поправки введем зависимость амплитуд линейных волн от медленного времени и больших линейных расстояний, что позволит обеспечить отсутствие вековых слагаемых на соответствующих масштабах. Для осуществления такой процедуры перейдем от переменных  $(t, x, y)$  к быстрым  $(T_0, X_0, Y_0)$  и медленным  $(T_1, X_1, Y_1)$  переменным, в соответствии с выражениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \frac{\partial}{\partial X_1} + \dots \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \frac{\partial}{\partial Y_1} + \dots \quad (3.4)$$

Таким образом, после введения разных масштабов, условием совместности системы уравнений, пропорциональной  $\epsilon^2$ , станет уравнение на медленно меняющиеся амплитуды. Это условие позволяет исключить вековые слагаемые и определяет  $\mathbf{u}_0(T_1, X_1, Y_1)$ .

Рассмотрев, сначала взаимодействие трех магнито-Пуанкаре волн амплитуд  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  с условием синхронизма  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  получим три уравнения на амплитуды:

$$a \frac{\partial \gamma}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \gamma}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \gamma}{\partial Y} = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m)\alpha\beta \quad (3.5)$$

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m)\gamma\beta \quad (3.6)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m)\gamma\alpha \quad (3.7)$$

В этой системе коэффициенты  $a$ ,  $b^1$ ,  $b^2$ ,  $k$ ,  $l^1$ ,  $l^2$ ,  $m$  - константы, определяемые начальными константами задачи ( $f$ ,  $H$ ,  $g$ ,  $B_z$ ). Рассмотрев случай, когда условиям синхронизма удовлетворяют три магнитострофические волны, получим следующую систему уравнений, описывающую взаимодействие медленных амплитуд трех магнитострофических волн:

$$a \frac{\partial \chi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \chi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m)\phi\psi \quad (3.8)$$

$$a \frac{\partial \phi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m)\chi\psi \quad (3.9)$$

$$a \frac{\partial \psi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \psi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m)\chi\phi \quad (3.10)$$

В случае, когда условиям синхронизма удовлетворяют две магнито-Пуанкаре волны и одна магнитострофическая волна получим систему:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \beta}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m)\alpha\phi \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \phi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m)\beta\alpha \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m)\beta\phi \end{aligned} \quad (3.13)$$

Когда взаимодействуют две магнитострофические волны и одна магнито-Пуанкаре волна:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \psi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \psi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m)\alpha\phi \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m)\psi\phi \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \phi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \\ = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m)\psi\alpha \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом в данном разделе получены системы нелинейных уравнений трехволновых взаимодействий в магнитогидродинамических течениях вращающейся тяжелой жидкости со свободной границей в приближении мелкой воды (3.5-3.7, 3.8-3.10, 3.11-3.13, 3.14-3.16)

## 4 Параметрические неустойчивости волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн

В данном разделе мы используем полученные уравнения трехволновых взаимодействий (трех магнито-Пуанкаре волн, трех магнитострофических волн, двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре) для качественного анализа трансформации волн в слабонелинейном приближении [19].

### 4.1 Распадные неустойчивости

Рассмотрим взаимодействие трех магнито-Пуанкаре волн, удовлетворяющих условию синхронизма  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Одна магнито-Пуанкаре волна с частотой  $\omega_3$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_3$  распадается на две магнито-Пуанкаре волны с частотами  $\frac{\omega_3}{2}$  и волновыми векторами  $\frac{\mathbf{k}_3}{2}$ . Из уравнений (3.5-3.7) получаем инкремент:

$$\Gamma = \frac{|f^*| \gamma_0}{a} \quad (4.1)$$

где

$$f^* = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\frac{\mathbf{k}_3}{2})) + l^1(\frac{k_{x3}}{2}) + l^2(\frac{k_{y3}}{2}) + 2m) \quad (4.2)$$

Рассмотрим трехволновое взаимодействие магнитострофических волн, удовлетворяющих условию синхронизма  $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Магнитострофическая волна с частотой  $\omega_3$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_3$  распадается на две магнитострофические волны с частотами  $\frac{\omega_3}{2}$  и волновыми векторами  $\frac{\mathbf{k}_3}{2}$ . Из уравнений (3.8-3.10) получаем инкремент:

$$\Gamma = \frac{f^* \chi_0}{a} \quad (4.3)$$

где

$$f^* = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\frac{\mathbf{k}_3}{2})) + l^1(\frac{k_{x3}}{2}) + l^2(\frac{k_{y3}}{2}) + 2m) \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие двух магнито-Пуанкаре волн и одной магнитострофической волны, удовлетворяющих условиям синхронизма  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Магнито-Пуанкаре волна с частотой  $\omega_3$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_3$  распадается на магнитострофическую волну с частотой  $\omega_1^0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_1^0$  и на магнито-Пуанкаре волну с частотой  $\omega_3 - \omega_1^0$

и волновым вектором  $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0$ , где  $\mathbf{k}_1^0$  определяется из начальных констант задачи. Из уравнений (3.11-3.13) получаем инкремент:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_2^*||f_3^*|}\beta_0}{a} \quad (4.5)$$

где

$$f_2^* = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0)) + l^1 k_{x1}^0 + l^2 k_{y1}^0) + 2m \quad (4.6)$$

$$f_3^* = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1^0)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}^0) + l^2(k_{y3} - k_{y1}^0) + 2m) \quad (4.7)$$

Наконец, рассмотрим случай резонанса двух магнитострофических волн и одной волны Пуанкаре магнитной гидродинамики, которые удовлетворяют условию синхронизма  $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Магнитострофическая волна с частотой  $\omega_3$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_3$  распадается на магнито-Пуанкаре волну с частотой  $\omega_1^0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_1^0$  и на магнитострофическую волну с частотой  $\omega_3 - \omega_1^0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0$ , где  $\mathbf{k}_1^0$  определяется исходными константами. Из системы (3.14-3.16) получаем инкремент:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_2^*||f_3^*|}\psi_0}{a} \quad (4.8)$$

где

$$f_2^* = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0)) + l^1(k_{x1}^0) + l^2(k_{y1}^0) + 2m) \quad (4.9)$$

$$f_3^* = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1^0)) + l^1(k_{x3} - k_{x1}^0) + l^2(k_{y3} - k_{y1}^0) + 2m) \quad (4.10)$$

Заметим, что в случае межмодовых взаимодействий, в конфигурациях с двумя магнитострофическими волнами и одной волной Пуанкаре магнитной гидродинамики, а также с двумя магнито-Пуанкаре волнами и одной магнитострофическими волнами, имеет место передача энергии из магнитострофической моды в моду магнито-Пуанкаре и наоборот, из моды магнито-Пуанкаре в магнитострофическую.

## 4.2 Параметрическое усиление

Другой вид неустойчивостей, которые описываются нелинейными системами уравнений, это неустойчивости слияния. Они представляют собой усиление третьей волны в результате нелинейного взаимодействия двух изначально распространяющихся волн.

Рассмотрим снова взаимодействие трех магнито-Пуанкаре волн, удовлетворяющих условию синхронизма  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Усиливающаяся магнито-Пуанкаре волна имеет частоту  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  и волновой вектор  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Инкремент такой неустойчивости из уравнений (3.5-3.7):

$$\Gamma = \frac{|f_1|\alpha_0\beta_0}{a} \quad (4.11)$$

где

$$f_1 = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m) \quad (4.12)$$

Рассмотрим взаимодействие трех магнитострофических волн, удовлетворяющих условию синхронизма  $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Усиливаемая магнитострофическая волна имеет частоту  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  и волновой вектор  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Инкремент получаем из уравнений (3.8-3.10):

$$\Gamma = \frac{|f_1|\psi_0\phi_0}{a} \quad (4.13)$$

где

$$f_1 = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m) \quad (4.14)$$

Рассмотрим случай взаимодействия двух магнито-Пуанкаре волн и одной магнитострофической волны, удовлетворяющих условию синхронизма  $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Магнито-Пуанкаре волна - сумма магнитострофической волны с частотой и волновым вектором  $\omega_1$  и  $\mathbf{k}_1$  и магнито-Пуанкаре волны с частотой и волновым вектором  $\omega_2$  и  $\mathbf{k}_2$ . Частота получившейся волны  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , ее волновой вектор  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Инкремент такой неустойчивости получаем из уравнений (3.11-3.13):

$$\Gamma = \frac{|f_1|\alpha_0\phi_0}{a} \quad (4.15)$$

где

$$f_1 = -i(k(\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m) \quad (4.16)$$

Последний случай трехволнового взаимодействия - две магнитострофические волны и одна волна магнито-Пуанкаре, которые удовлетворяют условию синхронизма  $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . Растущая магнитострофическая волна - сумма магнито-Пуанкаре волны с частотой  $\omega_1$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и магнитострофической волны с частотой  $\omega_2$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_2$ . Частота получившейся волны  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , волновой вектор этой волны  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Инкремент, получаемый из уравнений (3.14-3.16) имеет вид:

$$\Gamma = \frac{|f_1|\phi_0\alpha_0}{a} \quad (4.17)$$

где

$$f_1 = -i(k(\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)) + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m) \quad (4.18)$$

## 5 Заключение

В работе развита слабонелинейная теория волновых взаимодействий в крупномасштабных течениях вращающегося слоя плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести на ровной границе в вертикальном магнитном поле. Мы используем приближение мелкой воды магнитной гидродинамики

для получения уравнений взаимодействия волновых пакетов волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Наличие вертикального магнитного поля обеспечивает выполнение условий синхронизма, а именно три волны могут взаимодействовать, когда частоты и волновые векторы двух волн таковы, что сумма их частот равна частоте третьей волны и одновременно сумма волновых векторов этих волн равна волновому вектору третьей волны. В результате анализа дисперсионных поверхностей исследуемых волн обнаружено, что такое условие может выполняться для следующих конфигураций трех волн: три волны магнито-Пуанкаре (рисунок 2), три магнитострофические волны (рисунок 3), а также две магнитострофические волны и одна магнито-Пуанкаре волна (рисунок 4) и две магнито-Пуанкаре волны и одна магнитострофическая волна (рисунок 5). Получено слабонелинейное решение задачи асимптотическим методом многомасштабных разложений. Для каждого из обнаруженных видов взаимодействий найдены системы нелинейных уравнений (3.5-3.7, 3.8-3.10, 3.11-3.13, 3.14-3.16) для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн. Показано, что в слабонелинейном приближении имеются распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. Обнаружено существование следующих типов распадных неустойчивостей: магнито-Пуанкаре волна распадается на две магнито-Пуанкаре волны с инкрементом (4.1), магнитострофическая волна распадается на две магнитострофические волны с инкрементом (4.3), магнито-Пуанкаре волна распадается на одну магнито-Пуанкаре волну и одну магнитострофическую волну с инкрементом (4.5), магнитострофическая волна распадается на одну магнитострофическую и одну магнито-Пуанкаре волну с инкрементом (4.8). Существует также четыре типа неустойчивостей параметрического усиления волн: параметрическое усиление магнито-Пуанкаре волн с коэффициентом параметрического усиления (4.11), параметрическое усиление магнитострофических волн с коэффициентом усиления (4.13), а также усиление магнито-Пуанкаре волны в поле магнитострофической волны с коэффициентом усиления (4.15) и усиление магнитострофической волны в поле магнито-Пуанкаре волны с коэффициентом параметрического усиления (4.17). Работа выполнена при поддержке программы №9 президиума РАН "Экспериментальные и теоретические исследования объектов солнечной системы и звездных планетных систем" и гранта РФФИ 14-29-06065. Авторы признательны С.Ю. Доброхотову за полезные обсуждения асимптотических методов многих масштабов.

## Список литературы

- [1] TV Zaqarashvili, R Oliver, JL Ballester, and BM Shergelashvili. Rossby waves in "shallow water" magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 470(3):815–820, 2007.
- [2] Kevin Heng and Anatoly Spitkovsky. Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis. *The Astrophysical Journal*, 703(2):1819, 2009.

- [3] NA Inogamov and RA Sunyaev. Spread of matter over a neutron-star surface during disk accretion: Deceleration of rapid rotation. *Astronomy letters*, 36(12):848–894, 2010.
- [4] Kevin Heng and Adam P. Showman. Atmospheric dynamics of hot exoplanets. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 43(1):509–540, 2015.
- [5] Kevin Heng and Jared Workman. Analytical models of exoplanetary atmospheres. i. atmospheric dynamics via the shallow water system. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 213(2):27, 2014.
- [6] James Y-K Cho. Atmospheric dynamics of tidally synchronized extrasolar planets. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1884):4477–4488, 2008.
- [7] Peter A Gilman. Stability of baroclinic flows in a zonal magnetic field: Part i. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24(2):101–118, 1967.
- [8] Steven M Tobias, Patrick H Diamond, and David W Hughes.  $\beta$ -plane magnetohydrodynamic turbulence in the solar tachocline. *The Astrophysical Journal Letters*, 667(1):L113, 2007.
- [9] Alexander M. Balk. Large-scale quasi-geostrophic magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 796(2):143, 2014.
- [10] Peter A Gilman. Magnetohydrodynamic. *The Astrophysical Journal Letters*, 544(1):L79, 2000.
- [11] К.В. Карельский and С.В. Петросян, А.С. и Тарасевич. Нелинейная динамика магнитогидродинамических течений тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 140(3):606–620, 2011.
- [12] KV Karelsky, AS Petrosyan, and SV Tarasevich. Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic shallow water flows over an arbitrary surface. *Physica Scripta*, 2013(T155):014024, 2013.
- [13] K.V. Karelsky, A.S. Petrosyan, and S.V. Tarasevich. Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic flows of heavy fluid on slope in shallow water approximation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 146(2):352–367, 2014.
- [14] Hans De Sterck. Hyperbolic theory of the “shallow water” magnetohydrodynamics equations. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 8(7):3293–3304, 2001.
- [15] Paul J Dellar. Dispersive shallow water magnetohydrodynamics. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 10(3):581–590, 2003.

- [16] V Zeitlin. Remarks on rotating shallow-water magnetohydrodynamics. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 20(5):893–898, 2013.
- [17] Geoffrey K Vallis. *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] Lev Ostrovsky. *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*. World Scientific, 2014.
- [19] Gregory Falkovich. *Fluid mechanics: A short course for physicists*. Cambridge University Press, 2011.
- [20] Е.А. Кузнецов. *Нелинейные волны, часть 1*. НГУ, 2015.
- [21] Е.Н. Пелиновский, В.Е. Фридман, and Ю.К. Энгельбрехт. *Нелинейные эволюционные уравнения*. Таллин Валгус, 1984.
- [22] David W Hughes, Robert Rosner, and Nigel Oscar Weiss. *The Solar Tachocline*. Cambridge University Press, 2007.
- [23] Patrick H Diamond, Sanae-I Itoh, and Kimitaka Itoh. *Modern Plasma Physics: Volume 1, Physical Kinetics of Turbulent Plasmas*. Cambridge University Press, 2010.
- [24] MS Longuet-Higgins, AE Gill, and K Kenyon. Resonant interactions between planetary waves [and discussion]. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 299, pages 120–144. The Royal Society, 1967.