

## Особенности учета влияния изменения экономического цикла на оценку кредитного риска на основе внутренних рейтингов заемщиков (IRB-подход)

А.А. Стежкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одной из самых актуальных открытых проблем IRB-подхода является проведение валидации рейтинговой модели, а также её обновление в периоды смены фаз экономического цикла.

Положим, мы построили рейтинговую модель с использованием одного из методов, например, logit-модель:

$$P(I = 1 | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \psi(\beta^T \mathbf{x} + \gamma) = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 * x_1 + \dots + \beta_n * x_n + \gamma)}$$

Валидация, в том числе калибровка модели и исследование стабильности, была проведена с использованием имевшихся данных за длительный временной горизонт (например, 3 года), в течение которого экономика вообще и банковский сектор в частности показывали стабильный рост.

Допустим теперь, что вслед за ростом экономики следует её спад. Построенная и ранее откалиброванная модель уже не может с прежним уровнем достоверности применяться к новым заемщикам. Отдельные параметры (количественные или качественные показатели) могли потерять свою значимость в новых экономических условиях, другие, наоборот, могли стать более важными. Текущую рейтинговую систему необходимо обновить.

В качестве решения может быть предложено следующее.

### 1) Разработка новой модели.

А именно, модели, в которую изначально должны быть заложены ожидания по значимости тех или иных показателей. Потенциальной проблемой в данном случае может быть недостаток приемлемых для построения такой модели данных (данных по заемщикам в период экономического спада).

### 2) Экспертное суждение.

Данное решение предполагает ручные корректировки параметров  $\beta_i$  модели в зависимости от предполагаемой динамики изменений этих параметров в рамках тех или иных соображений.

### 3) Использование статистических показателей.

Экспертное суждение может быть основано на оперативной оценке изменений соответствующих показателей. К примеру, количественные показатели в рамках рейтинговой модели могут быть скорректированы в той же пропорции, какие относительные изменения наблюдаются в краткосрочной или долгосрочной перспективе в финансовом секторе.

#### 4) Стресс-тестирование.

Данный подход является более комплексным, нежели предыдущие, и может быть использован в качестве превентивной меры в отношении оценки параметров рейтинговой модели в условиях тех или иных изменений в экономике.

Например, разработаем три стресс-сценария:

- умеренный (неблагоприятные изменения финансовых показателей в относительном выражении до 10%);
- негативный (изменения до 30%);
- критический (изменения свыше 30%).

Сценариев может быть и больше.

Кроме того, для каждого из сценариев определим вероятность, с которой ожидается его наступление.

Итак, пусть:

$q_i$  – вероятности наступления сценариев, очевидно,  $\sum_i q_i = 1$ ;

$y_{ik}$  – результирующая вероятность дефолта согласно  $i$ -му сценарию для  $k$ -го заемщика.

Тогда оценочная итоговая вероятность дефолта уточненной рейтинговой модели для  $k$ -го определится следующим образом:

$$p_k = \sum_i q_i * y_{ik}.$$

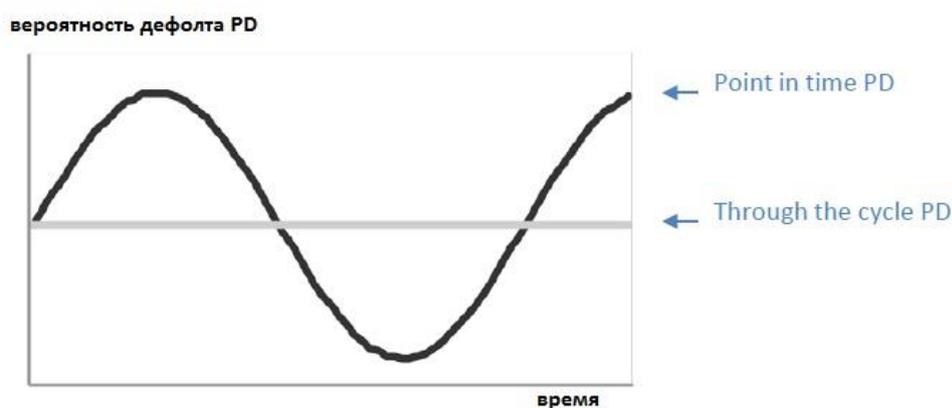
Вероятность дефолта заемщика зависит не только от количественных и качественных показателей его деятельности, но также от состояния (цикла) экономики и того, насколько значительно текущая экономическая ситуация может повлиять на заемщика.

Соответственно, различают стрессовую (stressed PD) и нестрессовую (unstressed PD) вероятности дефолта. Нестрессовая вероятность дефолта оценивает вероятность объявления заемщиком дефолта в течение определенного периода времени, принимая во внимание как текущие показатели деятельности заемщика, так и характеристики экономической ситуации. Вероятность дефолта, определенная с учетом этих данных, будет расти в случае ухудшения ситуации в экономике и, напротив, снижаться в случае

подъема экономики. Стрессовая вероятность дефолта есть вероятность объявления заемщиком дефолта в течение определенного периода времени, принимая во внимание текущие показатели деятельности заемщика и «стрессовые» экономические условия, вне зависимости от того, каковы они на данный момент.

Эти два способа оценки вероятности дефолта определяют две так называемые рейтинговые философии (rating philosophy). Первая, которая носит название «в момент времени» (point-in-time, PIT), позволяет определить вероятность дефолта, как следует из термина, в конкретный момент времени, то есть, принимая во внимания ожидаемое изменение экономического цикла. Как следует из вышеупомянутого, к данной концепции имеет отношение понятие нестрессовой вероятности дефолта.

Вторая философия носит название «в течение цикла» (through-the-cycle, TTC). Она предполагает измерение средней вероятности дефолта за весь экономический цикл. В её основу заложены некоторые усредненные показатели экономики, к этой философии относится стрессовая вероятность дефолта.



**Рисунок 1.** Иллюстрация рейтинговых философий.

В рамках международной практики предпочтение зачастую отдается философии TTC, поскольку она позволяет обеспечивать стабильность требований к капиталу, что в свою очередь соответствует ожиданиям как регулятора (в части отсутствия резких колебаний величины достаточности капитала), так и акционеров (в части стабильного дохода).

Построение моделей в рамках TTC производится с помощью:

1) Модель «переменного коэффициента» (Variable Scalar Approach).

Позволяет трансформировать модель PIT в TTC, искусственно снижая вероятность дефолта в периоды потерь и, наоборот, повышая ее в периоды роста до некоторого значения, соответствующего средней вероятности дефолта, вычисленной за долгосрочный период.

Опишем формально, как работает эта модель.

Шаг 1. Определяем среднюю вероятность дефолта по портфелю за долгосрочный период (положим, она составляла 5%).

Шаг 2. Определяем среднюю вероятность дефолта с использованием текущей рейтинговой модели РИТ (положим, она составила 2,5%).

Шаг 3. Определяем искомый коэффициент путем деления исторической вероятности дефолта (за долгосрочный период) на вероятность дефолта согласно модели (в нашем случае получим:  $5/2,5=2$ ).

Шаг 4. Корректируем результаты рейтинговой модели РИТ на полученный коэффициент. Ясно, что средняя вероятность дефолта по полученной скорректированной модели будет соответствовать вероятности дефолта по портфелю за долгосрочный период (то есть, как в модели ТТС).

В соответствии с ведущими международными практиками (например, Банка Англии), кредитные организации, применяющие модель «переменного коэффициента», должны соответствовать следующим принципам:

- (i) Первоначальный, а также все последующие расчеты поправочного коэффициента должны учитывать не только изменения экономического цикла, но также все прочие факторы, влияющие на вероятность дефолта.
- (ii) Средняя вероятность дефолта по портфелю за долгосрочный период должна быть рассчитана исходя из предположения о неизменности бизнес-модели кредитной организации за этот период.
- (iii) Средняя вероятность дефолта по портфелю за долгосрочный период должна быть рассчитана на основе выборки приемлемого размера.
- (iv) Расчет поправочного коэффициента должен быть математически и экономически обоснован.

## 2) Структурные модели (Structural Models).

Данный класс моделей предполагает построение отдельной ТТС рейтинговой системы. Особенностью таких моделей является особый подход к отбору переменных. В модель включаются макроэкономические переменные, а также нециклические показатели (то есть не зависящие от экономического цикла). При этом не включаются «поведенческие» показатели, присущие тем или иным заемщикам. Это позволяет добиться относительно стабильного показателя PD в рамках модели, что и является ключевым элементом концепции ТТС.

Формализуем концепции РИТ и ТТС. Рассмотрим смешанную модель для определения вероятности дефолта, объединяющую достоинства обеих концепций.

Начнем с того, что вероятность дефолта в рамках РИТ зависит от момента времени  $t$ , когда это вероятность, а значит и все составляющие её показатели, были измерены. Заметим также, что информация (совокупность составляющих показателей) может быть представлена в виде линейной комбинации двух величин, одна из которых есть фактор, характеризующий банковскую и экономическую системы в совокупности, а вторая присуща только конкретному заемщику (идиосинкратическая величина).

Для определенности будем рассматривать только один системный фактор  $Z$ , распределенный нормально.

Определим вероятность дефолта в концепции РИТ  $p_i(z)$  для  $i$ -го заемщика как вероятность объявить дефолт на горизонте в 12 месяцев при условии, что системный фактор  $Z$  достигнет значения  $z$ .

Тогда вероятность дефолта в концепции ТТС есть усредненная по всем системным факторам вероятность дефолта в концепции РИТ.

Итак,

$$q_i = E_Z[p_i(Z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i(z) \phi(z) dz,$$

где  $\phi$  – функция плотности стандартного нормального распределения.

Средние вероятности по портфелю  $P$  в рамках концепций РИТ и ТТС есть, соответственно:

$$p_P(z) = \frac{1}{V_P} \sum_{i \in P} p_i(z),$$

$$q_P = \frac{1}{V_P} \sum_{i \in P} q_i.$$

Необходимо отметить, что практически все существующие рейтинговые модели по сути являются гибридными, то есть чем-то средним между РИТ и ТТС, поскольку разделение факторов на характеризующих систему и зависящих только от заемщика (идиосинкратических) зачастую неосуществимо.

Одновременно, важно упомянуть, что различия между двумя концепциями проявляется именно на уровне портфеля. Для конкретного  $i$ -го заемщика  $q_i$  обладает практически такой же волатильностью, что и  $p_i$ , поскольку идиосинкратический фактор столь же значим, как и системный фактор. На уровне портфеля же  $p_P$  будет обладать волатильностью в соответствии с экономическим циклом, тогда как  $q_P$  практически постоянна во времени (при условии неизменного состава портфеля).

Далее для построения модели разобьем портфель на несколько частей, в зависимости от того, каким образом на заемщиков влияют изменения в экономической

среде. Запишем уже известное нам выражение для итоговой совокупности факторов (модель Мертона):

$$X_i = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i.$$

Напомним, что  $Z$  характеризует экономику (общие для всех заемщиков в каждой части портфеля факторы),  $\varepsilon_i$  – совокупность уникальных для заемщика факторов,  $\rho$  – коэффициент корреляции между  $X_i$  и  $Z$ .

Получим:

$$p_i(z) = P[X_i < B_i | Z] = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right),$$

$\Phi$  – интегральная функция стандартного нормального распределения,  $B_i$  – характеристика заемщика (предельное значение его итоговой совокупности факторов).

Усреднив полученное выражение по всем «состояниям»  $z$ , получим в соответствии с уже произведенными ранее преобразованиями:

$$q_i = E_Z[p_i] = \Phi(B_i).$$

Поскольку мы не можем измерить частоту дефолта по одному заемщику, перейдем к вероятности дефолта в среднем по портфелю.

$$p_p(Z) = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right),$$

$$q_p = \Phi(B).$$

Параметр  $B$  можно интерпретировать как  $B_i$  для среднестатистического заемщика (заемщика, принадлежащего к центральной тенденции).

С практической точки зрения отметим, что имея временной ряд  $d_t$  частот дефолтов по заемщикам, входящим в конкретную часть портфеля, могут быть вычислены параметры  $\rho$ ,  $B$  (а значит и  $\Phi(B)$ ), а также временной ряд  $Z_t$ .

Действительно,

$$d_t = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1-\rho}}\right);$$

$$\Phi^{-1}(d_t) = \frac{B - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1-\rho}};$$

$$Z_t = \frac{B - \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$

Вычислим отдельно:

$$E[\Phi^{-1}(p)] = \frac{B}{\sqrt{1-\rho}},$$

$$V[\Phi^{-1}(p)] = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Далее произведем подстановку  $d \rightarrow \Phi^{-1}(d)$  и обозначим за  $m$  и  $\sigma^2$  математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины, то есть:

$$m = \frac{B}{\sqrt{1-\rho}},$$

$$\sigma^2 = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Разрешив эту систему относительно  $B$  и  $\rho$ , получим:

$$B \approx \frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2}},$$

$$\rho \approx \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}.$$

С учетом этого наш ряд  $Z_t$  примет следующий вид:

$$Z_t = \frac{m - \Phi^{-1}(d_t)}{\sigma}.$$

Для каждой части портфеля величины  $Z$ ,  $B$  и  $\rho$  свои.

Теперь положим, что кредитный портфель банка является частью «глобального» портфеля, например, совокупность всех крупных предприятий. Используя статистику по дефолтам для конкретного сектора предприятий, можно рассчитать статистики  $Z$ ,  $B$  и  $\rho$ .

Положим, что каждый заемщик подвержен одним и тем же влияниям со стороны экономических условий, то есть  $Z$  и  $\rho$  одинаковые для всех. Внутренние же характеристики риска для каждого заемщика свои ( $q_i = \Phi(B_i)$ ). Стоит заметить, что  $q = \Phi(B)$  для «глобального» портфеля не обязательно совпадает с аналогичной величиной для банковского портфеля  $q_b = \Phi(B_b)$ , кроме того величина  $q_b$  может меняться со временем (состав портфеля банка может изменяться), но в глобальном смысле эта величина не меняется.

Здесь мы уйдем от предположения о нормальном распределении величины  $Z_t$ , ведь с очевидностью  $Z_t$  будет зависеть от предыдущего значения  $Z_{t-1}$ . Поэтому к предположению о нормальности  $Z$  мы добавим условие, что  $Z_t$  – авторегрессионный процесс (показано в 2008 году Lamb & Perraudin).

$$X_{i,t} = \sqrt{\rho}Z_t + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{i,t},$$

$$Z_t = \sqrt{\beta}Z_{t-1} + \sqrt{1-\beta}\eta_t.$$

В вышеупомянутой работе показано, что введя для частоты дефолта  $\theta_t$  трансформированную величину  $\tilde{\theta}_t = \Phi^{-1}(\theta_t)$  можно показать,  $\tilde{\theta}_t$  есть процесс авторегрессионный:

$$\tilde{\theta}_t = \sqrt{\beta}\tilde{\theta}_{t-1} + \frac{(1-\sqrt{\beta})B}{\sqrt{1-\rho}} - \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\rho}}\eta_t.$$

Любопытно заметить, что положив в данном выражении  $\beta = 0$ , мы получим в точности уже выведенный ранее результат.

Итеративно преобразовав процесс, можно получить:

$$\tilde{\theta}_t = (\sqrt{\beta})^t \tilde{\theta}_0 + \frac{(1-\sqrt{\beta})B}{\sqrt{1-\rho}} \sum_{j=0}^{t-1} (\sqrt{\beta})^j - \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\rho}} \sum_{j=0}^{t-1} (\sqrt{\beta})^j \eta_{t-j}.$$

Отсюда математическое ожидание:

$$E[\tilde{\theta}_t] = (\sqrt{\beta})^t \tilde{\theta}_0 + \frac{(1-(\sqrt{\beta})^t)B}{\sqrt{1-\rho}},$$

а дисперсия:

$$V[\tilde{\theta}_t] = \frac{\rho(1-\beta^t)}{1-\rho}.$$

Предположим теперь, что у нас имеется рейтинговая модель в концепции РИТ, то есть у нас есть  $p_i$  для  $i$ -го заемщика в момент времени  $t$ . Пусть также для того же момента времени у нас есть величина  $Z_t$ .

Из уже известного выражения

$$p_i = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}Z_t}{\sqrt{1-\rho}}\right),$$

получим:

$$B_i = \sqrt{\rho}Z_t + \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(p_i).$$

Отсюда вероятность дефолта в концепции ТТС:

$$q_i = \Phi\left(\sqrt{\rho}Z_t + \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(p_i)\right).$$

Заметим, что полученная величина вероятности дефолта не является постоянной. Располагая с течением времени все большей информацией о заемщике, можно уточнять вероятность дефолта независимо от экономического цикла.

Наконец, назовем  $\alpha$  «степенью РИТ»,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

То есть, в терминах искомой смешанной модели, мы имеем ТТС-модель при  $\alpha = 0$  и РИТ-модель при  $\alpha = 1$ . Введенный параметр есть характеристика рейтинговой модели и не несет определенного финансового или экономического смысла. По сути, это экспертно определяемая степень того, насколько хорошо модель соответствует экономическому циклу.

Положим, что вероятность дефолта в смешанной модели зависит от переменной  $Z$  аналогично тому, как было определено в случае модели РИТ, с учетом поправки коэффициента корреляции на величину  $\alpha^2$ .

Итак,

$$p_{i,\alpha}(z) = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}\alpha z}{\sqrt{1 - \rho\alpha^2}}\right).$$

Математическое ожидание функции переменной  $z$ :

$$E_z[p_{i,\alpha}] = E_z\left[\Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}\alpha z}{\sqrt{1 - \rho\alpha^2}}\right)\right] = /\text{положим } \tilde{\rho} = \rho\alpha^2/ = E_z\left[\Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\tilde{\rho}}z}{\sqrt{1 - \tilde{\rho}}}\right)\right] = \Phi(B_i) = q_i.$$

Величина  $p_{i,\alpha}$ , усредненная по всем состояниям экономики  $z$ , есть вероятность дефолта в модели ТТС. Это значит, что вероятность дефолта в модели ТТС не зависит от «степени РИТ»  $\alpha$  рейтинговой модели.

Граничные случаи:  $p_{i,1} = p_i, p_{i,0} = q_i$ .

Предположим теперь, что у нас есть смешанная модель с заданным постоянным в течение определенного периода времени  $\alpha$ , которая оценивает вероятность дефолта  $i$ -го заемщика в момент времени  $t$ , то есть величину  $p_{i,\alpha}$ .

Отсюда, используя имеющиеся результаты, легко получить:

$$q_i = \Phi\left(\sqrt{\rho}\alpha Z_t + \sqrt{1 - \rho\alpha^2} \Phi^{-1}(p_{i,\alpha})\right),$$

то есть не что иное, как вероятность дефолта в модели ТТС, которая учитывает как изменения в экономической ситуации (первое слагаемое в аргументе функции), так и изменения параметров заемщика (второе слагаемое).

Используя полученное выражение, можно проводить прогнозную оценку вероятности дефолта в модели РИТ для заданного состояния экономики:

$$p_i(z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(q_i) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1 - \rho}}\right).$$

Для оценки параметра  $\alpha$  введем понятие кредитного портфеля со стабильным профилем риска, то есть такого портфеля, центральная тенденция вероятности дефолта

которого в модели ТТС не изменяется со временем, иными словами, средние величины  $B_i$  портфеля постоянные. Для такого портфеля рассмотрим два состояния экономики  $Z_1$  и  $Z_2$ :

$$\Phi^{-1}(p_{i,\alpha}(Z_1)) = \frac{B_i - \sqrt{\rho\alpha} Z_1}{\sqrt{1 - \rho\alpha^2}},$$

$$\Phi^{-1}(p_{i,\alpha}(Z_2)) = \frac{B_i - \sqrt{\rho\alpha} Z_2}{\sqrt{1 - \rho\alpha^2}}.$$

Затем возьмем среднее значение по всему портфелю (по всем заемщикам) по каждому состоянию экономики, а затем вычислим разность между двумя получившимися выражениями:

$$\Delta \left( \frac{1}{V_P} \sum_{i \in P} \Phi^{-1}(p_{i,\alpha}(Z)) \right) = \frac{\sqrt{\rho\alpha} \Delta Z}{\sqrt{1 - \rho\alpha^2}}.$$

Полученное выражение позволяет оценить коэффициент  $\alpha$ , поскольку левая часть уравнения может быть вычислена на основе данных по портфелю. Для получения приемлемой оценки необходимо произвести несколько подобных вычислений (для различных состояний экономики), а затем усреднить оценки.

Указанный алгоритм справедлив для портфеля со стабильным профилем риска. В случае изменения величин  $B_i$  (например, добавления в портфель новых заемщиков с повышенным профилем риска), полученные выкладки могут быть воспроизведены только для заемщиков, которые были включены в портфель в оба момента времени.