

Различные подходы к решению задачи Сен-Венана о кручении

А.В. Чедрик

Центральный аэрогидродинамический институт

Авиационные конструкции в полете подвергаются различного рода нагрузкам, важной составляющей которых является кручение. Такие негативные аэроупругие явления, как дивергенция крыла, флаттер, реверс органов управления зачастую обуславливаются недостатком крутильной жесткости. Наряду с этим, проектирование упруго-подобных и динамически-подобных моделей [1], используемых для исследования таких явлений, подразумевает разработку упругих элементов в виде балки, обеспечивающей с требуемой точностью заданное распределение жесткостей. В связи с этим практически необходимым является разработка эффективных методов численного решения задачи о кручении.

В настоящей работе был проведен сравнительный анализ различных численных методов для решения задачи Сен-Венана о кручении призматических стержней. Разработанные методы используют различные подходы для решения уравнений Лапласа и Пуассона. Для решения уравнения Пуассона с неизвестными граничными условиями применялся метод конечных элементов (МКЭ) с использованием различных интерполяций функции напряжения, а также возможной адаптацией расчетных сеток.

При решении задачи о кручении в виде уравнения Лапласа для задачи Неймана и Дирихле применялся метод поиска решения в виде гармонических полиномов вида

$$\psi(x, y) = \sum_{k=1}^N [a_k \operatorname{Re}(x + iy)^k + b_k \operatorname{Im}(x + iy)^k],$$
 который не требует создания расчетных сеток.

Разработан метод фундаментальных решений (метод источников) для решения уравнения Лапласа, где оно ищется в виде линейной комбинации фундаментальных решений вида $\Phi_j(x, y, u, v) = \log \sqrt{(x - u_j)^2 + (y - v_j)^2}$, являющимися радиальными сингулярными функциями, где (u_j, v_j) – положение «источников» за пределами области сечения. В работе исследовалась эффективность разработанных алгоритмов для различных сечений, а также приведены примеры их применения для расчетных исследований авиационных конструкций.

Результаты расчёта крутильной константы, проведенные в настоящей работе для различных односвязных и многосвязных сечений, указывают на достоверность получаемых численных результатов. Приведены сравнительные результаты для известных аналитических решений, а также показана эффективность разработанных алгоритмов для

сложных сечений. На рис. 1 показан пример задачи о кручении для симметричного креста при помощи комбинации методов гармонических полиномов и метода источников, когда решения уравнения Лапласа искалось в виде комбинации полиномиальных (16 полиномов) и логарифмических (88 источников) гармонических функций. Определены распределения суммарных касательных напряжений в сечении, а также функция напряжений Прандтля. Добавление дополнительных источников вблизи углов сечения позволяет уточнить решение на основе анализа касательных напряжений и добиться высокой концентрации напряжений в угловых точках.

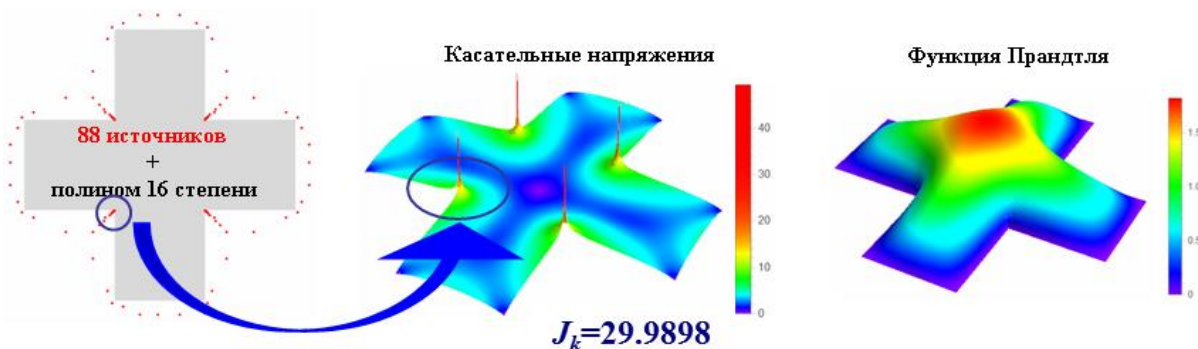


Рис. 1. Распределение касательных напряжений и визуализация функции Прандтля для симметричного креста.

Следующий пример (рис. 2) показывает возможность применения разработанных методов для построения упрощенной модели крыла в виде упругой балки (УБ). Для выбранных 11 сечений подробной (2.5 млн. степеней свободы) конечно-элементной модели крыла, были определены изгибные и крутильные жесткости.

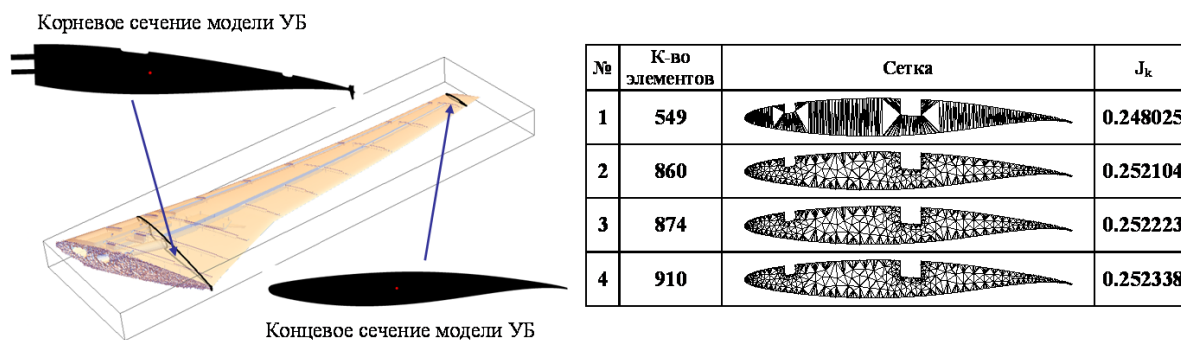


Рис. 2. Сходимость значения крутильной константы (справа) для одного из сечений подробной конечно-элементной модели крыла (слева)

На примере одного из сечений показана сходимость значения крутильной константы, определяемой по МКЭ, в зависимости от подробности разбиения. Использование упрощенной таким образом модели позволяет существенно уменьшить время расчётов и использовать её в анализе аэроупругости.

Литература

1. *Азаров Ю.А., Зиченков М.Ч., Ишмуратов Ф.З., Чедрик В.В.* Методы проектирования композиционных динамически подобных моделей агрегатов самолета. – Учёные записки ЦАГИ, 2006. – Т. XXXVII (4).