

УДК 519.63

Оценка эффективности параллельной реализации разрывного метода Галёркина для решения линейной системы уравнений упругости на высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных системах

В.А. Миряха

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Разрывный метод Галёркина зарекомендовал себя для численного решения гиперболических систем уравнений, и имеет ряд положительных особенностей [1], но требует большего количества вычислительных ресурсов, по сравнению с конечно-разностными и спектральными методами, в частности, из-за дублирования степеней свободы на границе расчётных ячеек. Также для достижения высокого пространственного разрешения в прикладных задачах, в частности, прямых задачах наземной и морской сейсморазведки, необходимо использование высоких порядков базисных полиномов и числа расчётных ячеек  $\sim 10^7$ . Численные эксперименты с количеством степеней свободы  $\sim 10^9$  возможно проводить только с использованием высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем. Разрывный метод Галёркина из-за локальности своего шаблона хорошо подходит для параллельной реализации, как для вычислительных систем с распределенной памятью с использованием технологий OpenMP и MPI, так и для графических процессоров.

В работе проводится оценка эффективности разрабатываемого программно-вычислительного комплекса [2]. Ниже приведём зависимость ускорения по отношению к одному ядру от количества используемых ядер отдельно для вычислительных комплексов с общей памятью на технологии *OpenMP*, а также для комплексов с распределенной памятью отдельно для технологий *MPI* и *OpenMP + MPI*.

Измерение ускорения для технологии OpenMP проводилось на процессорах Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v2 @ 2.1GHz (2 процессора по 6 ядер) (см. рис. 1а). Измерения проводились на расчётной сетки из 52000 ячеек для полиномов 5-го порядка и стандартного интегратора Рунге-Кутты 4-го порядка. Для *OpenMP* на 12 ядрах эффективность составляет 74.7%. Это можно объяснить особенностями работы кэшей процессоров (наличием промахов в кэше), с которыми можно бороться перенумерацией ячеек расчётной сетки, добиваясь большей локальности хранения данных. Данный приём может дать прирост в эффективности на 15–20%.

Для *MPI* на 12 ядрах эффективность составляет 82.1%. Стоит обратить внимание, что при этом в случае *OpenMP* ячейки между процессорами разбиваются фактически поровну, а в случае *MPI* библиотека *METIS* используемую в тесте расчётную сетку разбила на домены так, что максимальный от минимального отличались по размерам на 4%. В данном контексте эту величину будем называть *неидеальность разбиения*. Видно, что проблем с промахами кэшей у *MPI* меньше, так что даже при

отличной от нуля неидеальности разбиения данных подход показывает более высокий результат эффективности, чем *OpenMP*. Проблема с неидеальностью разбиения заметно проявляется при большом числе расчётных доменов (*MPI*-процессов), когда неидеальность разбиения уже на 200 доменах может превышать 20% при использовании библиотеки *METIS* для декомпозиции сетки. Совместный *OpenMP+MPI* тест показал следующие результаты (см. рис. 1б). Для теста использовалась тетраэдральная сетка из 445929 ячеек, полиномы 4-го порядка и стандартный интегратор Рунге-Кутты 4-го порядка (эквивалентно  $\approx 1,6 \cdot 10^7$  степеням свободы). Расчёты проводились на кластере Курчатовского института: узлы на основе процессоров Intel Xeon E5450 (3,00 ГГц, 4 ядра) (2 процессора на узел). Узлы соединены сетью InfiniBand DDR. С ростом числа ядер уменьшается размер домена, увеличиваются расходы на пересылку сообщений, ухудшается качество работы алгоритма декомпозиции на домены (неидеальность разбиения около 15% на 100 узлах и 20% на 200 узлах). Ускорение вычислялось относительно последовательного кода. Если последовательная реализация один шаг по времени осуществляла за 279.2 сек. (среднее за 100 первых шагов интегрирования), то на  $240 \times 4 \times 2 = 1920$  ядрах – за 0.259 сек с учётом синхронизаций.

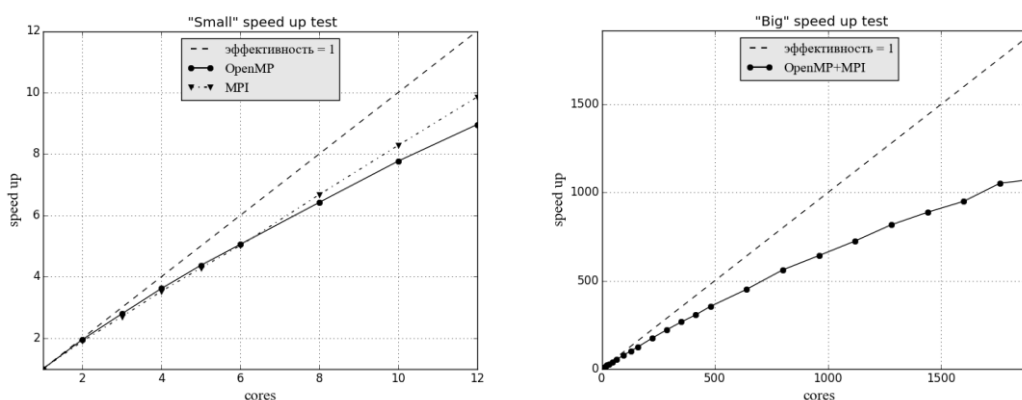


Рис. 1. Ускорение от числа ядер при использовании технологий OpenMP и MPI (слева) и совместном использовании OpenMP+MPI (справа).

Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ мол\_a\_вед 15-37-20673.

#### Литература

1. *Hesthaven J. S., Warburton T.* Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications. Texts in Applied Mathematics. — Springer, 2008.
2. *Миряха В. А., Санников А. В., Петров И. Б.* Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 3. — С. 96–108.