

Нелинейные задачи о действии сосредоточенной силы для некоторых гармонических материалов

Т.О. Доманская

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматриваются плоские задачи нелинейной теории упругости для двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы на линии раздела. Механические свойства описываются моделями гармонических материалов [1] (полулинейный материал и материал Джона). В случае малых деформаций модели приводят к закону Гука. Использование данных гармонических материалов позволило применить теорию комплексных функций и получить точные аналитические решения краевых задач. Исходя из этих решений, построена асимптотика номинальных (условных) напряжений, истинных напряжений Коши и перемещений в окрестности точки приложения силы. Сделано сравнение главных членов напряжений и перемещений для двух моделей материалов. Полученное решение сопоставлено с линейным решением задачи Фламана.

Модель полулинейного материала рассматривалась рядом авторов, например, в [2, 3] и др. Комплексная формулировка нелинейной плоской задачи впервые предложена в работе [4]. Дальнейшее развитие комплексного метода было дано в работе [5]. Соотношения нелинейной плоской задачи для материала Джона, отличающиеся от ранее известных, получены в работе [6]. Там же предложен метод решения, основанный на введении функций скачков напряжений и деформаций на линии раздела материалов, и построены точные решения ряда задач для двухкомпонентной пластины, в частности задачи о сосредоточенных силах на линии раздела. В работах [7, 8] решен ряд задач о трещинах и сосредоточенных нагрузках в двухкомпонентной плоскости для модели полулинейного материала. Нелинейные задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости исследованы в работах [9, 10] для разных моделей нелинейно упругого материала без использования комплексных функций.

Следует отметить, что в литературе мало работ, посвященных решению задач о сосредоточенных нагрузках на основе полностью нелинейных уравнений теории упругости, и полученные результаты имеют важное значение для теории и приложений.

Постановка задачи

Рассматривается двухкомпонентная плоскость. Пусть в начале координат приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2 , обозначим $F = F_1 + iF_2$. Предполагается,

что на бесконечности напряжения отсутствуют. На линии раздела двух полуплоскостей имеют место скачки напряжений и деформаций

$$[s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- = \Delta s(t), \quad [g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- = \Delta g(t),$$

где $\Delta s(t) = -iF\delta(t)$ и $\Delta g(t) = 0$.

Как частный случай, из задачи о сосредоточенной силе в двухкомпонентной плоскости, получим решение задачи о сосредоточенной силе на границе полуплоскости. Граничное условие имеет вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ = p(t), \quad p(t) = -iF\delta(t).$$

Общие соотношения

Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где s_{ij} — компоненты тензора номинальных напряжений, g_{ij} — компоненты градиента деформации, $i, j = 1, 2$.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Истинные напряжения Коши. Для истинных напряжений получим формулы

$$\varkappa_1(t_{11} + it_{12}) = s_{11} + is_{12}, \quad \varkappa_2(t_{22} - it_{21}) = s_{22} - is_{21}.$$

Кратности изменения площади находятся из равенства $\varkappa_i = |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J}\mathbf{G}^{-1}|$,

$$\varkappa_1 = \lambda_3 \sqrt{g_{22}^2 + g_{12}^2}, \quad \varkappa_2 = \lambda_3 \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}.$$

Полулинейный материал

Модель гармонического полулинейного материала позволяет рассматривать обе плоские задачи. Закон упругости для полулинейного материала [7], [8]

$$\begin{aligned} s_{11} + i s_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + i g_{21}) + \lambda(g_{22} - i g_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - i s_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - i g_{12}) + \lambda(g_{11} + i g_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$, λ_3 – кратность удлинения в поперечном направлении.

Подставив в первое и второе соотношения (3) выражения (2), получим систему уравнений для функций $\sigma(z, \bar{z})$ и $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

Константа c зависит от рассматриваемой задачи. Нужно учесть, что при плоской деформации $\lambda_3 = 1$, $k = -2(\lambda + \mu)$. В случае плоского напряженного состояния λ_3 и k являются функциями, определяемыми из условия $s_{33} = 0$ и третьего уравнения в (3).

Для указанных задач получим соответственно

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где ν – коэффициент Пуассона. Решение уравнений (4) имеет вид

$$2\mu\zeta = \frac{1}{1 + c} [\varphi(z) - \overline{\psi(z)} - f(z, \bar{z})], \quad \sigma = \frac{1}{1 + c} [c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + f(z, \bar{z})],$$

здесь $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические функции комплексной переменной z .

Выразим напряжения через функцию $\zeta(z, \bar{z})$

$$s_{11} + i s_{12} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad s_{22} - i s_{21} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) - 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}.$$

Задача о сосредоточенной силе на линии раздела. Пусть в начале координат приложена внешняя сила $F = F_1 + iF_2$. На бесконечности напряжения отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеют вид

$$[s_{22} - i s_{21}]^+ - [s_{22} - i s_{21}]^- = -iF\delta(t), \quad [g_{11} + i g_{21}]^+ - [g_{11} + i g_{21}]^- = 0. \quad (5)$$

Введем функции $h(z)$ и $r(z)$ для верхней полуплоскости S_2

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{c_2}{1 + c_2} \varphi_2'(z) - \frac{1}{1 + c_1} \Omega_1(z), \quad z \in S_2, \\ r(z) &= \frac{1}{2\mu_2} \frac{1}{1 + c_2} \varphi_2'(z) + \frac{1}{2\mu_1} \frac{1}{1 + c_1} \Omega_1(z), \quad z \in S_2, \end{aligned}$$

Для нижней полуплоскости функции $h(z)$ и $r(z)$ могут быть получены циклической перестановкой индексов в правых частях равенства.

Для функций $h(z)$ и $r(z)$ из условия (5) получим граничную задачу

$$[h(z)]^+ - [h(z)]^- = -iF\delta(t), \quad [r(z)]^+ - [r(z)]^- = 0,$$

решение которой будет иметь вид

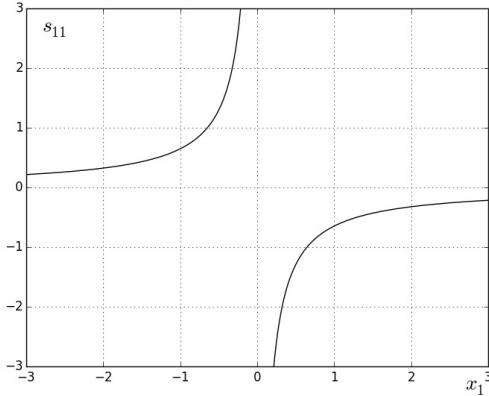
$$h(z) = -\frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{2\mu_1 c_1}{1+c_1} + \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2}, \quad r(z) = \frac{1-c_1 c_2}{(1+c_1)(1+c_2)}.$$

Асимптотические разложения условных напряжений и перемещений для двухкомпонентной плоскости (верхней полуплоскости S_2) при действии сосредоточенной силы на линии раздела имеют вид [11]

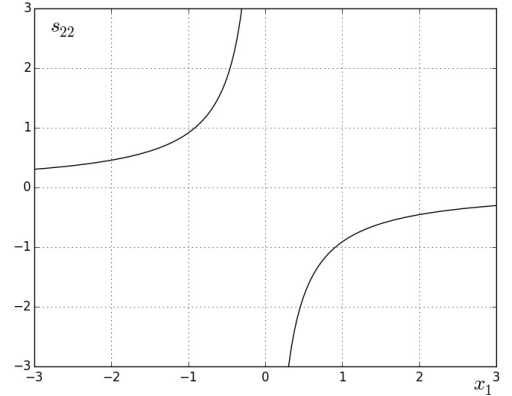
$$s_{11} + i s_{12} = -\mu_2 \left(\frac{c_2 e^{-i\theta}}{\mu_1 + \mu_2 c_2} + \frac{e^{i\theta}}{\mu_2 + \mu_1 c_1} \right) \frac{F}{2\pi r} + O(1),$$

$$s_{22} - i s_{21} = -\mu_2 \left(\frac{c_2 e^{-i\theta}}{\mu_1 + \mu_2 c_2} - \frac{e^{i\theta}}{\mu_2 + \mu_1 c_1} \right) \frac{F}{2\pi r} + O(1),$$

$$u_1 + i u_2 = -\left(\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 c_2} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 c_1} \right) \frac{F}{4\pi} \ln r + O(1).$$



(a) Напряжение s_{11} на для силы F_1



(b) Напряжение s_{22} для силы F_1

Рис. 1: Напряжения s_{11} и s_{22} на межфазной границе для горизонтальной силы F_1 (верхняя полуплоскость S_2)

Для верхней полуплоскости S_2 на графиках приведены напряжения s_{11} , s_{22} (кг/см²) на межфазной границе для горизонтальной силы F_1 (рис. 1) как функции от x_1 (см). Параметры системы: $\mu_2/\mu_1 = 5$, $\nu_1 = 0,48$, $\nu_2 = 0,45$, $F_1 = 5$ кг/см. Напряжения зависят только от соотношения модулей упругости μ_2/μ_1 .

Асимптотические разложения функций \varkappa_i при $|z| \rightarrow 0$ для двухкомпонентной плоскости [11]

$$\varkappa_1 = \lambda_3 \frac{|F|}{2\pi r} \sqrt{\frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 c_2)^2} + \frac{1}{(\mu_2 + \mu_1 c_1)^2} + \frac{2 \cos 2\theta}{(\mu_1 + \mu_2 c_2)(\mu_2 + \mu_1 c_1)}} + O(1),$$

$$\varkappa_2 = \lambda_3 \frac{|F|}{2\pi r} \sqrt{\frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 c_2)^2} + \frac{1}{(\mu_2 + \mu_1 c_1)^2} - \frac{2 \cos 2\theta}{(\mu_1 + \mu_2 c_2)(\mu_2 + \mu_1 c_1)}} + O(1).$$

Асимптотические разложения напряжений Коши для двухкомпонентной плоскости (верхней полуплоскости S_2) при действии сосредоточенной силы на линии раздела имеют вид [11]

$$t_{11} + it_{12} = -\mu_2 \frac{m_1 c_2 e^{-i\theta} + m_2 e^{i\theta}}{\sqrt{m_1^2 - 2m_1 m_2 \cos 2\theta + m_2^2}} \frac{F}{|F|} + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = -\mu_2 \frac{m_1 c_2 e^{-i\theta} - m_2 e^{i\theta}}{\sqrt{m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos 2\theta + m_2^2}} \frac{F}{|F|} + O(r),$$

где

$$m_1 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 c_2}, \quad m_2 = \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 c_1}.$$

Асимптотические разложения указанных выше функций для нижней полуплоскости могут быть получены циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях равенств.

Сосредоточенная сила на границе полуплоскости. Условие на границе полуплоскости имеет вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ = -iF\delta(t). \quad (6)$$

Напряжения на бесконечности отсутствуют. Решение данной задачи получим из решения задачи о действии сосредоточенной силы в двухкомпонентной плоскости, положив $\mu_1 = \lambda_1 = 0$. Функция $h(z)$ вводится с помощью соотношений

$$h(z) = \frac{c}{1+c} \varphi'(z), \quad z \in S_2, \quad h(z) = -\frac{1}{1+c} \Omega(z), \quad z \in S_1.$$

Граничные условия (6) с учетом функции $h(z)$ примут вид

$$[h(t)]^+ - [h(t)]^- = -iF\delta(t),$$

где решение

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + h(\infty), \quad h(\infty) = \frac{2\mu c}{1+c}.$$

Асимптотические разложения условных напряжений и перемещений при действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости вид [11, 12]

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{\pi r} \cos \theta + O(1), \quad s_{22} - is_{21} = i\frac{F}{\pi r} \sin \theta + O(1),$$

$$u_1 + iu_2 = -\frac{1-\nu}{\mu} \frac{F}{2\pi} \ln r + O(1).$$

Асимптотические разложения функций \varkappa_i при $|z| \rightarrow 0$ для полуплоскости [11]

$$\varkappa_1 = \lambda_3 \sqrt{1+c^2-2c \cos 2\theta} \frac{|F_0|}{1+c} \frac{1}{r} + O(1), \quad \varkappa_2 = \lambda_3 \sqrt{1+c^2+2c \cos 2\theta} \frac{|F_0|}{1+c} \frac{1}{r} + O(1).$$

Асимптотические разложения напряжений Коши при действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости вид [11, 12]

$$t_{11} + it_{12} = -\frac{4\mu c}{\lambda_3 \sqrt{1 + c^2 - 2c \cos 2\theta}} \frac{F_0}{|F_0|} \cos \theta + O(r),$$

$$t_{22} - it_{21} = \frac{4\mu ci}{\lambda_3 \sqrt{1 + c^2 + 2c \cos 2\theta}} \frac{F_0}{|F_0|} \sin \theta + O(r).$$

Гармонический материал Джона

Для гармонического материала Джона [1] закон упругости в комплексной форме имеет вид [6]

$$s_{11} + is_{12} = 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right],$$

$$s_{22} - is_{21} = 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right].$$

Придем к уравнению

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) таково

$$\sigma + 2\mu \zeta = \varphi(z), \quad (8)$$

где $\varphi(z)$ — неизвестная аналитическая функция.

Вместо задания функционала $F(I)$ можно сразу задать инвариант I как функцию от $|\varphi'(z)|$ [4, 5],

$$I(|\varphi'(z)|) = 2|\varphi'(z)| \left[b + s \frac{1}{|\varphi'(z)|^2} \right]. \quad (9)$$

Из (8) и (9) найдем потенциалы

$$\zeta = \overline{\psi(z)} + b\varphi(z) + \frac{sz}{\varphi'(z)}, \quad \sigma = (1 - 2\mu b)\varphi(z) - 2\mu \overline{\psi(z)} - 2\mu \frac{sz}{\varphi'(z)},$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция от z .

Постоянные b и c однозначно определяются из условий перехода нелинейного закона упругости в закон Гука при малых деформациях

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad s = \mu \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right),$$

где λ, μ — постоянные Ляме.

Получим формулы для номинальных напряжений

$$s_{11} + is_{12} = (1 - 2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu \frac{s}{\varphi'(z)} + 2\mu \overline{\psi'(z)} - 2\mu \frac{sz\overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)},$$

$$s_{22} - is_{21} = (1 - 2\mu b)\varphi'(z) - 2\mu \frac{s}{\varphi'(z)} - 2\mu \overline{\psi'(z)} + 2\mu \frac{s z \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)}.$$

Задача о сосредоточенной силе на линии раздела. Граничные условия вводятся как и в аналогичной задаче для модели полупространства.

Введем две новые функции комплексной переменной z для верхней полуплоскости S_2

$$h(z) = (1 - 2\mu_2 b_2)\varphi'_2(z) + 2\mu_1 \frac{s_1}{\varphi'_1(z)} + 2\mu_1 \overline{\psi'_1(z)} - 2\mu_1 \frac{s_1 z \overline{\varphi''_1(z)}}{\varphi'^2_1(z)},$$

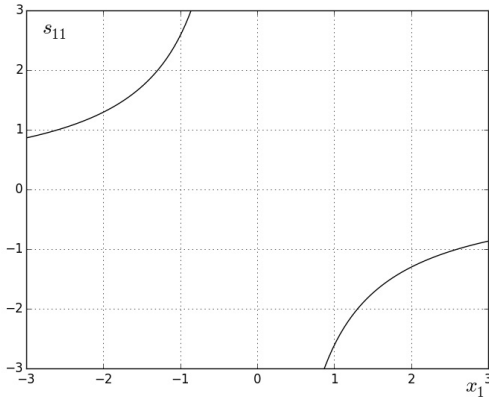
$$r(z) = b_2 \varphi'_2(z) - \frac{s_1}{\varphi'_1(z)} - \overline{\psi'_1(z)} + \frac{s_1 z \overline{\varphi''_1(z)}}{\varphi'^2_1(z)}.$$

Условия на линии раздела примут вид

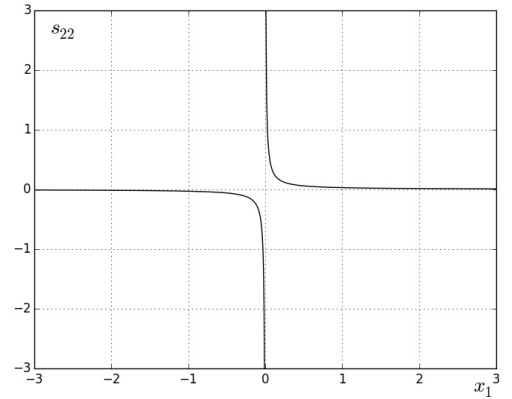
$$[h(z)]^+ - [h(z)]^- = -iF\delta(t), \quad [r(z)]^+ - [r(z)]^- = 0.$$

Пришли к двум граничным задачам Римана — Гильберта. Решение данных задач имеет вид

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + \mu_1 \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \mu_2 \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \quad r(z) = \frac{\mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1 + 4\mu_1 \mu_2}{2(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}.$$



(a) Напряжение s_{11} на для силы F_1



(b) Напряжение s_{22} для силы F_1

Рис. 2: Напряжения s_{11} и s_{22} на межфазной границе для горизонтальной силы F_1 (верхняя полуплоскость S_2)

Для верхней полуплоскости S_2 на графиках приведены напряжения s_{11} , s_{22} (кг/см²) на межфазной границе для горизонтальной силы F_1 (рис. 3) как функции от x_1 (см). Параметры системы: $\mu_2/\mu_1 = 5$, $\nu_1 = 0,48$, $\nu_2 = 0,45$, $F_1 = 5$ кг/см. Напряжения зависят только от соотношения модулей упругости μ_2/μ_1 .

Асимптотические разложения условных напряжений и перемещений для двухкомпонентной плоскости (верхней полуплоскости S_2) при действии сосредоточенной силы на линии раздела имеют вид [13]

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{r} \frac{(1 - 2\mu_2 b_2) e^{-i\theta}}{2\pi(1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2))} - \frac{F}{r} \frac{\mu_2 b_1 e^{i\theta}}{\pi(1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1))} + O(1),$$

$$s_{22} - is_{21} = -\frac{F}{r} \frac{(1 - 2\mu_2 b_2) e^{-i\theta}}{2\pi(1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2))} + \frac{F}{r} \frac{\mu_2 b_1 e^{i\theta}}{\pi(1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1))},$$

$$u_1 + iu_2 = -(p_1 + p_2) \frac{F}{2\pi} \ln r + O(1),$$

где

$$p_1 = \frac{b_1}{1 + 2b_1(\mu_2 - \mu_1)}, \quad p_2 = \frac{b_2}{1 + 2b_2(\mu_1 - \mu_2)}.$$

Асимптотические разложения функций \varkappa_i при $|z| \rightarrow 0$ для двухкомпонентной плоскости [13], как и в случае модели полуплинейного материала, имеют особенность $1/r$, а асимптотические разложения напряжений Коши для двухкомпонентной плоскости (верхней полуплоскости S_2) при действии сосредоточенной силы на линии раздела [13], не имеют особенности в полюсе.

Сосредоточенная сила на границе полуплоскости. Условие на границе полуплоскости вводится как и в аналогичной задаче для полуплинейного материала.

Функция $h(z)$ вводится с помощью соотношений

$$h(z) = (1 - 2\mu b)\varphi'(z), \quad z \in S_2, \quad h(z) = 2\mu \frac{s}{\varphi'(z)} + 2\mu \overline{\psi}'(z) - 2\mu \frac{sz\overline{\varphi}''(z)}{\varphi'^2(z)}, \quad z \in S_1.$$

Решив граничную задачу для функции $h(z)$, получим

$$(1 - 2\mu b)\varphi'(z) = 2\mu \frac{s}{\varphi'(z)} + 2\mu \overline{\psi}'(z) - 2\mu \frac{sz\overline{\varphi}''(z)}{\varphi'^2(z)} = \frac{F}{2\pi z} + 2\mu(1 - 2\mu b).$$

Асимптотические разложения условных напряжений и перемещений при действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости вид

$$s_{11} + is_{12} = -\frac{F}{\pi r} \cos \theta + O(r), \quad s_{22} - is_{21} = i \frac{F}{\pi r} \sin \theta,$$

$$u_1 + iu_2 = -\frac{1}{2\mu(1 - 2\mu b)} \frac{F}{2\pi} \ln r + O(1).$$

Асимптотические разложения функций \varkappa_i при $|z| \rightarrow 0$ для полуплоскости имеют особенность $1/r$, а асимптотические разложения истинных напряжений Коши при действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости не имеют особенности в полюсе.

Выводы

Номинальные напряжения нелинейных задач и напряжения линейной задачи имеют одинаковую особенность типа $1/r$ при $r \rightarrow 0$. Перемещения этих задач также имеют одну и ту же особенность $-\ln r$. Коэффициенты сингулярных членов в некоторых случаях совпадают, в других имеют отличия. Например, в нелинейной задаче Фламана главные члены асимптотических разложений номинальных напряжений для

двух материалов совпадают, а в перемещениях отличаются в два раза. Истинные напряжения Коши не имеют особенности в полюсе.

Сравнение с решением линейной задачи Фламана [14] показало, что напряжения и перемещения имеют одинаковый вид особенности в окрестности точки приложения силы: напряжения — $1/r$, перемещения — $\ln r$. В то же время они и принципиально различаются: в линейных задачах только радиальные напряжения отличны от нуля, а в нелинейных и касательные напряжения не равны нулю. Кроме того, коэффициенты при сингулярных членах в нелинейных и линейных задачах различны.

Список литературы

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. N 2. P. 239–296.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
3. *Черных К. Ф., Литвиненкова Э. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1988. 256 с.
4. *Varley E., Cumberbatch E.* Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // J. of Elasticity. 1980. V. 10, N 4. P. 341–405.
5. *Ru C. Q.* On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. V. 156, N 3–4. P. 219–234.
6. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
7. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2012. Вып. 3. С. 93–106.
8. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.
9. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Исследование нелинейной задачи Фламана // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006, № 5. С. 68–78.
10. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче Фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, Вып. 3. С. 453–462.
11. *Domanskaya T. O., Malkov V. M.* The state of stress in a vicinity of a point load on an interface of bi-material plate // International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading. 2015. IEEE. DOI: 10.1109/ Polykhov. 2015. 7106724.
12. *Доманская Т. О., Мальков В. М.* Плоская задача Мичела для полулинейного материала // Научное творчество XXI века: Сборник трудов по итогам VII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (31 октября, 2013 г.) / Под ред. Я.А. Максимова. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2013. С. 306–312.

13. *Доманская Т. О.* Нелинейная задача о сосредоточенной силе в двухкомпонентной плоскости из материала Джона // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2015. http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6971/uid82098_report.pdf

14. *Малькова Ю. В.* Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 160 с.