УДК 519.216

# Первый выход случайного процесса на границу области

С.Л. Семаков

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Финансовый университет

## §1. Введение

В работе [1] была сформулирована задача, которая часто и естественно возникает при исследовании стохастических систем и постановка которой восходит к работе [2]. Эта задача состоит в следующем. Пусть эволюция системы описывается $n$-мерным случайным процессом $\boldsymbol{\xi}(x)$. В начальный момент $x = 0$ система находилась в положении $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}^0$, которое, вообще говоря, может быть неизвестным. Независимой переменной $x$ является любая непрерывно и монотонно меняющаяся переменная, например, время или один из компонентов процесса $\boldsymbol{\xi}(x)$, удовлетворяющий этому условию. Пусть известно, что $\boldsymbol{\xi}^0 \in Q$, где $Q$ – заданная область в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$. Обозначим через $\partial Q$ границу области $Q$, а через $\partial_1 Q$ – какую-либо часть границы $\partial Q$. Требуется определить вероятность того, что процесс $\boldsymbol{\xi}(x)$ первый раз выйдет на границу области $Q$ в какой-либо момент из заданного промежутка изменения независимой переменной и этот выход произойдет на часть $\partial_1 Q$ границы $\partial Q$. Такая задача при различных конфигурациях области $Q$ и границы $\partial_1 Q$ возникает в тех случаях, когда функционирование рассматриваемой динамической системы соответствует нахождению описывающего ее эволюцию случайного процесса в заданной области $Q$ фазового пространства системы, причем последствия выхода процесса за пределы $Q$ зависят от того, через какую часть границы $\partial Q$ произойдет этот выход. Соответствующие содержательные примеры из различных предметных областей приведены в монографии [3]. Например, при $Q$ – полупространстве такая задача возникает в авиации при исследовании проблем безопасности посадки самолетов. Именно этот частный случай области $Q$ и рассматривается в настоящей работе.

Для диффузионных марковских процессов проблема нахождения указанной вероятности может быть сведена к решению смешанной задачи для уравнения в частных производных, что было показано еще в [2]. Результаты данной работы ориентированы на немарковские гладкие – непрерывные с вероятностью 1 и дифференцируемые в среднеквадратичном – случайные процессы.

### §2. Постановка задачи

Пусть $\boldsymbol{\xi}(x)=\{\xi_1(x),\ldots,\xi_i(x),\ldots,\xi_n(x)\}$ – $n$-мерный действительный случайный процесс, $y$ – действительное число. Будем рассматривать процессы $\boldsymbol{\xi}(x)$, определенные на полуинтервале $(x_0,x''], x_0\geq-\infty$, для которых

$$\lim_{x\to x_0} P\{\xi_i(x)>y\}=1. \tag{1}$$

Физический смысл условия (1) состоит в том, что в начальный момент динамическая система, поведение которой описывается случайным процессом $\boldsymbol{\xi}(x)$, находится в известной области

$$Q=\{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)\in R^n:\ v_i>y\}$$

своего фазового пространства.

Пусть произвольно заданы $x'\in(x_0,x'')$, $D$ – подмножество $(n-1)$-мерного евклидова пространства $R^{n-1}$. Определим событие

$$Z_D=\left\{\begin{array}{c}\text{существует } x^*\in(x',x'') \text{ такое, что для любого } x<x^*\ \ \xi_i(x)>y,\\ \xi_i(x^*)=y,\ (\xi_1(x^*),\ldots,\xi_{i-1}(x^*),\xi_{i+1}(x^*),\ldots,\xi_n(x^*))\in D\end{array}\right\}$$

и событие

$$L=\{\text{существует } \tilde{x}>x_0 \text{ такое, что для любого } x\in(x_0,\tilde{x})\ \ \xi_i(x)>y\}.$$

Требуется найти условную вероятность $P\{Z_D|L\}$ события $Z_D$ при условии, что произошло событие $L$.

Ясно, что без ограничения общности можно считать $i=1$, что и будем делать в дальнейшем для определенности. При $D=R^{n-1}$ задача становится одномерной, и в этом случае для обозначения события $Z_D$ будем использовать также символ $Z$. Отметим еще, что если $x_0$ конечно, то представленные ниже результаты сохранят силу, если вместо процессов, определенных на полуинтервале $(x_0,x'']$ и удовлетворяющих условию (1), рассматривать процессы, определенные на отрезке $[x_0,x'']$ и удовлетворяющие условию

$$P\{\xi_i(x_0)>y\}=1,$$

причем в этом случае событие $L$ будет определяться как $L=\{\xi_i(x_0)>y\}$.

## §3. Ранее установленные оценки

Следуя [4], обозначим через $G_y(x_0, x'')$ множество непрерывных на промежутке от $x_0$ до $x''$ – $[x_0, x'']$ или $(x_0, x'']$ в зависимости от рассматриваемого множества значений переменной $x$ – скалярных функций, которые не совпадают тождественно с $y$ ни в одном из интервалов этого промежутка. Нетрудно показать, что если выполнено условие (1), с вероятностью 1 выборочные функции $\xi_1(x)$ принадлежат множеству $G_y(x_0, x'')$ и не имеют касаний уровня $y$, среднее число пересечений $N(x_0, x'')$ уровня $y$ процессом $\xi_1(x)$ на интервале $(x_0, x'')$ конечно, то $P\{Z_D|L\}{=}P\{Z_D\}$, т. е. вместо оценок условной вероятности $P\{Z_D|L\}$ можно заниматься оценками безусловной вероятности $P\{Z_D\}$.

Используя терминологию, принятую в [4], обозначим через $N^+(x_1, x_2)$ $(N^-(x_1, x_2))$ среднее число выходов (входов) процесса $\xi_1(x)$ за (под) уровень $y$ на промежутке $(x_1, x_2)$. Через $N_D^-(x_1, x_2)$ будем обозначать среднее число входов компонента $\xi_1(x)$ под уровень $y$ на промежутке $(x_1, x_2)$ с выполнением в моменты входов условия $(\xi_2, \ldots, \xi_n){\in}D$ на остальные компоненты процесса $\boldsymbol{\xi}(x)$. В работе [1] установлен следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть 1) с вероятностью 1 выборочные функции $\xi_1(x)$ принадлежат множеству $G_y(x_0, x'')$ и не имеют касаний уровня $y$ на промежутке $(x_0, x'')$, $N(x_0, x'') < \infty$; 2) $P\{\xi_1(x'){=}y\} = 0$; 3) выполнено условие (1). Тогда*

$$N_D^-(x', x'') - (N^-(x', x'') - P\{Z\}) \le P\{Z_D\} \le N_D^-(x', x''),$$

$$0 \le N^-(x', x'') - P\{Z\} \le N^+(x_0, x'').$$

Точность этих оценок, т. е. разность между верхней и нижней оценками искомой вероятности, зависит от “склонности” выборочных функций $\xi_1(x)$ пересекать уровень $y$ снизу вверх на интервале $(x_0, x'')$ и определяется величиной числа $N^+(x_0, x'')$. Иллюстрирующие примеры и численные оценки приведены в работах [1,3]. В [3] кроме того показано, насколько эффективными оказались эти оценки в авиационных приложениях при их использовании для вычисления вероятности успешного приземления реальных самолетов, в частности, самолетов корабельного базирования при посадке последних на реальный авианесущий крейсер с учетом, в том числе, и возможной качки корабля. В этом случае в роли $\boldsymbol{\xi}(x)$ выступает случайный процесс, описывающий движение самолета в системе координат, связанной с посадочной поверхностью, независимой переменной $x$ является дальность полета, компонентом $\xi_1(x)$ – высота полета над уровнем посадочной поверхности, уровень $y{=}0$.

Что касается других имеющихся в литературе результатов, относящихся к решению близких по постановке задач об оценке вероятности достижения заданных границ немарковским процессом, то все известные автору подобные результаты относятся к одномерному случаю, в котором в качестве случайного процесса $\xi(x)$ выступает, как правило, стационарный нормальный процесс, причем с корреляционной функцией специального вида. В качестве примера можно указать на результаты, принадлежащие Р.Н. Мирошину [5] и С. Берману (S. Berman) [6]. Первый, предполагая определенное асимптотическое представление для корреляционной функции стационарного нормального процесса $\xi(x)$, получил оценки вероятности $P\{\xi(x) \leq \leq kx + a$ для любого $x \in [0, x^*]\}$ невыхода процесса $\xi(x)$ за наклонный уровень. Второй вычислил асимптотику вероятности пересечения барьера $u + +f(x)$ при $u \to +\infty$, где $f(x)$ – детерминированная непрерывная функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. Еще один интересный, но очень частный результат принадлежит Д. Слепяну (D. Slepian) [7], который получил точное выражение для вероятности $P\{\xi(x) \geq 0$ для любого $x \in [0, x^*]\}$, где процесс $\xi(x)$ определяется равенством $\xi(x) = U + V \cos(\frac{x}{\beta} + W)$, в котором $U, V, W$ – независимые случайные величины, причем $U$ и $V$ распределены нормально с $\mathbf{E}\{U\} = \mathbf{E}\{V\} = 0$, $\mathbf{E}\{U^2\} = 1 - \beta^2$, $\mathbf{E}\{V^2\} = \beta^2$, а $W$ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$.

### §4. Новый результат

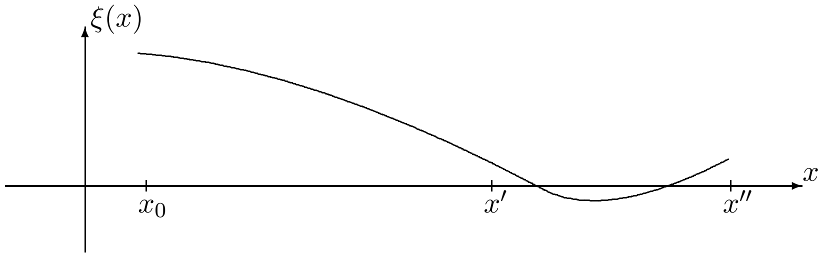
Попытаемся улучшить приведенные оценки для $P\{Z_D\}$. С этой целью заметим, что, как следует из теоремы 1, улучшение оценок для $P\{Z\}$ влечет за собой и улучшение оценок для $P\{Z_D\}$. Поэтому будем пытаться улучшить оценки

$$N^-(x', x'') - N^+(x_0, x'') \leq P\{Z\} \leq N^-(x', x'') \tag{2}$$

для вероятности $P\{Z\}$.

Поскольку ниже всюду будет рассматриваться одномерный случай, то при обозначении процесса $\xi_1(x)$ индекс 1 будем опускать и писать $\xi(x)$. Обозначим через $m_y(x_1, x_2)$ среднее число локальных максимумов процесса $\xi(x)$ выше уровня $y$ на интервале $(x_1, x_2)$. Число $m_y(x_1, x_2)$ так же, как и $N^-(x_1, x_2)$ и $N^+(x_1, x_2)$, является интегральной характеристикой процесса $\xi(x)$ и может быть вычислено при известной плотности совместного распределения значений процесса $\xi(x)$ и его производных $\xi'(x)$ и $\xi''(x)$ (см., например, [4]).

Предположим, что вероятность более двух пересечений уровня $y$ выборочными функциями $\xi(x)$ до момента $x''$ пренебрежимо мала, а вероятность двух пересечений вполне ощутима, так что характерная реализация процесса $\xi(x)$ либо не пересекает уровень $y$ на интервале $(x_0, x'')$, либо пересекает его ровно один или два раза. Пусть кроме того в случае двух пересечений поведение реализации, как правило, такое, как на рисунке, и доля таких реализаций сравнима с долей реализаций, пересекающих уровень $y$ только один раз или не пересекающих его ни разу. Тогда, очевидно, вероятность $P\{Z\}$ хорошо приближается числом $N^-(x', x'')$. Однако при этом оценки (2) будут очень грубыми, поскольку величина $N^+(x_0, x'')$ будет сравнима с единицей. В этой ситуации эффективные оценки искомой вероятности может дать формулируемая ниже теорема 2.




**Теорема 2.** *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть* $x^*$ *– произвольная точка из интервала* $(x_0, x'')$ *такая, что* $P\{\xi(x^*){=}y\} = 0$, $m_y(x^*, x''){<}\infty$. *Тогда*

$$N^-(x', x'') - (N^+(x_0, x^*) + m_y(x^*, x'')) \le P\{Z\} \le N^-(x', x''). \tag{3}$$

Доказательство теоремы 2 основано на идеях, представляющих собой развитие подхода, предложенного в [1], и не связано с какими-либо другими из известных автору работами по этой тематике.

## §5. Приложение к нормальным процессам

Будем теперь считать, что

$$\xi(t) = a_0 + a_1 t + \eta(t), \tag{4}$$

где в качестве независимой переменной выступает время $t$; $a_0$, $a_1$ – постоянные; $\eta(t)$ – стационарный дважды дифференцируемый в среднеквадратичном нормальный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, где $\sigma^2$ – дисперсия процесса $\eta(t)$. Обозначим через $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ дисперсии стационарных процессов $\eta'(t)$ и $\eta''(t)$. В силу (4) дисперсии процессов $\xi(t)$, $\xi'(t)$ и $\xi''(t)$ также равны $\sigma^2$, $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ соответственно.

Заметим, что $\sigma_1^2 = -\sigma^2 R''(0)$, $\sigma_2^2 = \sigma^2 R^{(4)}(0)$; функции взаимной корреляции $k_{\xi\xi'}(\tau) \equiv k_{\eta\eta'}(\tau)$, $k_{\xi'\xi''}(\tau) \equiv k_{\eta'\eta''}(\tau)$ и равны нулю при $\tau = 0$; функция взаимной корреляции $k_{\xi\xi''}(\tau) \equiv k_{\eta\eta''}(\tau)$ и при $\tau = 0$ равна $\sigma^2 R''(0)$, так что соответствующий коэффициент корреляции

$$r = \frac{k_{\xi\xi''}(0)}{\sigma\sigma_2} = \frac{R''(0)}{\sqrt{R^{(4)}(0)}},$$

причем, как видно, $r < 0$, если только дисперсии $\sigma^2$, $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ отличны от нуля и конечны. Для плотности $w_t(x, y, z)$ совместного распределения значений $\xi(t)$, $\xi'(t)$, $\xi''(t)$ имеем

$$w_t(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(y - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left[\frac{(x - a_0 - a_1 t)^2}{\sigma^2} - 2r\frac{(x - a_0 - a_1 t)z}{\sigma\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Среднее число максимумов процесса $\xi(t)$ на интервале $(t_1, t_2)$, превышающих уровень $C$, определяется по формуле (см. [4])

$$m_C(t_1, t_2) = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{C}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{0} z w_t(x, 0, z) dz.$$

Вводя новые переменные $\tilde{x} = x - a_0 - a_1 t$, $\tilde{z} = z$, $\tilde{t} = t$, получим

$$m_C(t_1, t_2) = -\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tilde{t} \int\limits_{C - a_0 - a_1\tilde{t}}^{\infty} d\tilde{x} \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left[\frac{\tilde{x}^2}{\sigma^2} - 2r\frac{\tilde{x}\tilde{z}}{\sigma\sigma_2} + \frac{\tilde{z}^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} d\tilde{z}.$$

После еще одной замены $\bar{x} = \tilde{x}/\sigma$, $\bar{z} = \tilde{z}/\sigma_2$, $\bar{t} = \tilde{t}$ найдем

$$m_C(t_1,t_2) = -\int\limits_{t_1}^{t_2} d\bar{t} \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\bar{t}}{\sigma}}^{\infty} \sigma d\bar{x} \int\limits_{-\infty}^{0} \sigma_2 \bar{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{\bar{x}^2 - 2r\bar{x}\bar{z} + \bar{z}^2}{2(1-r^2)}\right\} \sigma_2 d\bar{z} =$$

$$= -\frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} d\bar{t} \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\bar{t}}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\bar{x}^2}{2(1-r^2)}\right\} d\bar{x} \int\limits_{-\infty}^{0} \bar{z} \exp\left\{-\frac{\bar{z}^2 - 2r\bar{x}\bar{z}}{2(1-r^2)}\right\} d\bar{z}.$$

Преобразуем показатель экспоненты в последнем интеграле:

$$-\frac{\bar{z}^2 - 2r\bar{x}\bar{z}}{2(1-r^2)} = -\frac{(\bar{z}-r\bar{x})^2 - r^2\bar{x}^2}{2(1-r^2)}.$$

Сделаем замену переменных

$$u = \bar{x}, \quad v = \bar{z} - r\bar{x}, \quad \tau = \bar{t}.$$

Тогда получим

$$m_C(t_1,t_2) = -\frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}\right\} du \int\limits_{-\infty}^{-ru} (v+ru) \exp\left\{-\frac{v^2 - r^2u^2}{2(1-r^2)}\right\} dv =$$

$$= -\frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \int\limits_{-\infty}^{-ru} (v+ru) \exp\left\{-\frac{v^2}{2(1-r^2)}\right\} dv.$$

Обозначим внутренний интеграл по $v$ через $f(u)$ и вычислим его:

$$f(u) \equiv \int\limits_{-\infty}^{-ru} (v+ru) \exp\left\{-\frac{v^2}{2(1-r^2)}\right\} dv =$$

$$= -(1-r^2)\exp\left\{-\frac{ru^2}{2(1-r^2)}\right\} + ru\int\limits_{-\infty}^{-ru}\exp\left\{-\frac{v^2}{2(1-r^2)}\right\}dv;$$

вводя интеграл вероятности

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\{-x^2/2\}dx,$$

находим

$$f(u) = -(1-r^2)\exp\left\{-\frac{ru^2}{2(1-r^2)}\right\} + \sqrt{2\pi(1-r^2)}ru\Phi\Big(-\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\Big).$$

Таким образом,

$$m_C(t_1,t_2) = -\frac{\sigma_2\exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{t_1}^{t_2}I(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где обозначено

$$I(\tau) = I_1(\tau) + I_2(\tau),$$

$$I_1(\tau) = \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} -(1-r^2)\exp\Big\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}\Big\}du,$$

$$I_2(\tau) = \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty}\sqrt{2\pi(1-r^2)}ru\exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\}\Phi\Big(-\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\Big)du.$$

Займемся вычислением интеграла $I_2(\tau)$:

$$I_2(\tau) = -\sqrt{2\pi(1-r^2)}r\int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty}\Phi\Big(-\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\Big)d\left(\exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\}\right) =$$

$$= -\sqrt{2\pi(1-r^2)}r\left[\Phi\Big(-\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\}\Big|_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{r^2u^2}{2(1-r^2)}\Big\}\Big(-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\Big)du\right] =$$

$$= \sqrt{2\pi(1-r^2)}r\Phi\Big(-\frac{r(C-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-r^2}}\Big)\exp\Big\{-\frac{(C-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\Big\}-$$

$$-\quad r^2 \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}\Big\} du,$$

откуда следует

$$I(\tau) = -\int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}\Big\} du \quad +$$

$$+\sqrt{2\pi(1-r^2)}\, r\Phi\Big(-\frac{r(C-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-r^2}}\Big) \exp\Big\{-\frac{(C-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

Выражая здесь первое слагаемое через функцию $\Phi$:

$$-\int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}\Big\} du = -\sqrt{1-r^2} \int\limits_{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-r^2}}}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\} du =$$

$$= -\sqrt{1-r^2}\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\} du \quad - \int\limits_{-\infty}^{\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-r^2}}} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\} du\Bigg] =$$

$$= -\sqrt{2\pi(1-r^2)}\Big[1-\Phi\Big(\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-r^2}}\Big)\Big],$$

в соответствии с (5) находим для $m_C(t_1,t_2)$:

$$m_C(t_1,t_2) = -\frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{2\pi\sigma_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg[-1+\Phi\Big(\frac{C-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-r^2}}\Big)+$$

$$+ r\Phi\Big(-\frac{r(C-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-r^2}}\Big) \exp\Big\{-\frac{(C-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\Big\}\Bigg] d\tau.$$

Обозначим

$$\nu = \nu(\tau, r) = \frac{r(C-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-r^2}}.$$

Тогда

$$m_C(t_1,t_2) = \frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{2\pi\sigma_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[1-\Phi(\nu) - r\Phi(-r\nu) \exp\Big\{-\frac{1-r^2}{2}\nu^2\Big\}\Big] d\tau,$$

или, учитывая тождество $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$,

$$m_C(t_1, t_2) = \frac{\sigma_2 \exp\{-a_1^2/2\sigma_1^2\}}{2\pi\sigma_1} \cdot$$
$$\cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[ \Phi(-\nu) - r\Phi(-r\nu) \exp\left\{ -\frac{1-r^2}{2}\nu^2 \right\} \right] d\tau.$$

Найдем теперь среднее число $N^+(t', t'')$ выходов процесса $\xi(t)$ за уровень $C$ на интервале $(t', t'')$. Как известно (см., например, [4]), это число может быть подсчитано по формуле

$$N^+(t', t'') = \int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_0^\infty y w_t(C, y) dy,$$

где $w_t(x, y)$ – плотность совместного распределения значений $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ в момент $t$. Поскольку для рассматриваемого процесса $\xi(t)$

$$w_t(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1} \exp\left\{ -\frac{(x - a_0 - a_1 t)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

то

$$N^+(t', t'') = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1} \int\limits_{t'}^{t''} \exp\left\{ -\frac{(C - a_0 - a_1 t)^2}{2\sigma^2} \right\} dt \int\limits_0^\infty y \exp\left\{ -\frac{(y - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dy.$$

Оба интеграла здесь легко вычисляются; первый – с помощью замены $\tau = (C - a_0 - a_1 t)/\sigma$:

$$\int\limits_{t'}^{t''} \exp\left\{ -\frac{(C - a_0 - a_1 t)^2}{2\sigma^2} \right\} dt \ = \ -\frac{\sigma}{a_1} \int\limits_{\frac{C - a_0 - a_1 t'}{\sigma}}^{\frac{C - a_0 - a_1 t''}{\sigma}} \exp\left\{ -\frac{\tau^2}{2} \right\} d\tau =$$
$$= -\frac{\sigma}{a_1} \sqrt{2\pi} \left[ \Phi\left( \frac{C - a_0 - a_1 t''}{\sigma} \right) - \Phi\left( \frac{C - a_0 - a_1 t'}{\sigma} \right) \right],$$

а второй – с помощью замены $\bar{y} = (y - a_1)/\sigma_1$:

$$\int\limits_0^\infty y \exp\left\{ -\frac{(y - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dy \ = \int\limits_{-a_1/\sigma_1}^\infty (\sigma_1 \bar{y} + a_1) \exp\left\{ -\frac{\bar{y}^2}{2} \right\} \sigma_1 d\bar{y} =$$

$$= \sigma_1^2 \int\limits_{-a_1/\sigma_1}^{\infty} \bar{y} \exp\Big\{-\frac{\bar{y}^2}{2}\Big\} d\bar{y} \;+\; a_1\sigma_1 \int\limits_{-a_1/\sigma_1}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{\bar{y}^2}{2}\Big\} d\bar{y} \;=$$

$$= \sigma_1^2 \exp\Big\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\Big\} + \sqrt{2\pi} a_1 \sigma_1 \Big[1 - \Phi\Big(-\frac{a_1}{\sigma_1}\Big)\Big] =$$

$$= \sigma_1^2 \exp\Big\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\Big\} + \sqrt{2\pi} a_1 \sigma_1 \Phi\Big(\frac{a_1}{\sigma_1}\Big).$$

В результате получаем

$$N^+(t', t'') = \Big[\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} a_1} \exp\Big\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\Big\} + \Phi\Big(\frac{a_1}{\sigma_1}\Big)\Big] \cdot$$
$$\cdot \Big[\Phi\Big(\frac{C - a_0 - a_1 t'}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{C - a_0 - a_1 t''}{\sigma}\Big)\Big].$$

Проделав аналогичные вычисления для $N^-(t', t'')$ – среднего числа входов процесса $\xi(t)$ под уровень $C$ на интервале $(t', t'')$, которое может быть подсчитано по формуле (см. [4])

$$N^-(t', t'') = -\int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{-\infty}^{0} y w_t(C, y) dy,$$

найдем:

$$N^-(t', t'') = \Big[\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} a_1} \exp\Big\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\Big\} - \Phi\Big(-\frac{a_1}{\sigma_1}\Big)\Big] \cdot$$
$$\cdot \Big[\Phi\Big(\frac{C - a_0 - a_1 t'}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{C - a_0 - a_1 t''}{\sigma}\Big)\Big].$$

Пусть теперь $a_1 < 0$. Тогда по теореме 2 при любом $t^* \in (-\infty, t'')$

$$N^-(t', t'') - \Big(N^+(-\infty, t^*) + m_C(t^*, t'')\Big) \le P\{Z\} \le N^-(t', t''), \tag{6}$$

где $P\{Z\}$ – вероятность того, что первое достижение уровня $C$ процессом $\xi(t)$ произойдет на интервале $(t', t'')$. Пусть для определенности $C = 0$, $a_0 = 0$, $t'' > 0$. Тогда, вводя безразмерные параметры $\alpha = -a_1/\sigma_1 > 0$ и $\beta = -a_1 t''/\sigma > 0$, получим

$$N^+(-\infty, t^*) = \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\Big\{-\frac{\alpha^2}{2}\Big\} - \Phi(-\alpha)\Big] \Phi\Big(\beta \frac{t^*}{t''}\Big),$$

$$N^-(t',t'') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} + \Phi(\alpha)\right]\left[\Phi(\beta) - \Phi\left(\beta\frac{t'}{t''}\right)\right],$$

$$m_C(t^*,t'') = -\frac{\beta}{2\pi r\alpha}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\}\cdot$$
$$\cdot\int\limits_{t^*/t''}^{1}\left[\Phi\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-r^2}}v\right) - r\Phi\left(-\frac{r\beta}{\sqrt{1-r^2}}v\right)\exp\left\{-\frac{\beta^2v^2}{2}\right\}\right]dv.$$

Как видно, оценки (6), вычисляемые по этим формулам, позволяют учесть зависимость от коэффициента корреляции $r$, тогда как оценки

$$N^-(t',t'') - N^+(-\infty,t'') \le P\{Z\} \le N^-(t',t''),$$

даваемые теоремой 1, не учитывают эту зависимость: коэффициент $r$ не входит в выражения для $N^+(-\infty,t'')$ и $N^-(t',t'')$.

Литература


1. *Семаков С.Л.* Первое достижение границ случайным процессом // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 6. – С. 87–95.

2. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1933. – Т. 3, № 3. – С. 165–180.

3. *Семаков С.Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. – М.: Наука, 2005. – 200 с.

4. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 400 с.

5. *Мирошин Р.Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. – Ленинград: ЛГУ, 1981. – 212 с.

6. *Berman S.* Excursions of Stationary Gaussian Processes abuve High Moving Barriers // Ann. Probab. – 1973. – V. 1, № 3. – P. 365–387.

7. *Slepian D.* The One-sided Barrier Problem for Gaussian Noise // Bell Syst. Techn. J. – 1962. – V. 41, № 2. – P. 463–501.