

Применение WENO-схем на треугольных сетках для численного решения уравнений газовой динамики на примере задачи о переносе изоэнтропического вихря

А.И. Лопато, П.С. Уткин

Институт автоматизации проектирования РАН

Численное решение задач распространения сильных ударных и детонационных волн в областях сложной формы, соответствующих реальным объектам, например, изогнутым трубам в системах трубопроводов или камерам сгорания двигательных установок, требует использования в общем случае неструктурированных расчетных сеток. Построение монотонных схем повышенного порядка аппроксимации на подобных сетках представляет собой существенную трудность с точки зрения современной теории разностных схем.

Целью данной работы является практическая реализация схемы WENO [1] на треугольных сетках для численного интегрирования уравнений газовой динамики, а также тестирование данной методики на примере решения следующей начально-краевой задачи, описывающей перенос изоэнтропического вихря:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = 0, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Обозначения газодинамических величин стандартные. Введем в рассмотрение расчетную сетку, состоящую из треугольников. Конечно-объемный аналог (1) записывается в виде:

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_i}{dt} = \mathbf{L}(\bar{\mathbf{U}}) = -\frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\partial\Delta_i} (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}_x + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_y) ds, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\bar{\mathbf{U}}_i$ – среднее значение вектор-функции \mathbf{U} в треугольной ячейке Δ_i , \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к ребру треугольника. Интегрирование по времени осуществляется с использованием схемы Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации. Интеграл в правой части (2) аппроксимируется с помощью квадратурной формулы Гаусса второго порядка:

$$\int_{\partial\Delta_i} (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}_x + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_y) ds \approx \sum_{k=1}^3 \left(l_k \sum_{j=1}^q [\omega_j^{(k)} \mathbf{F}_j^{(k)}] \right), \mathbf{F}_j^{(k)} \approx \mathbf{F}_{\text{AUSM}} \left((\mathbf{U}_j^{(k)})^-, (\mathbf{U}_j^{(k)})^+ \right),$$

где l_k – длина k -го ребра треугольника Δ_i , $\omega_j^{(k)}$ – веса квадратурной формулы Гаусса, $\mathbf{F}_j^{(k)}$ – численный поток в направлении нормали $\mathbf{n}^{(k)}$ в j -ой Гауссовой точке, \mathbf{U}_j^- и \mathbf{U}_j^+ – значения сеточной функции \mathbf{U} в Гауссовой точке j внутри и снаружи треугольника Δ_i . В качестве

$\mathbf{F}_j^{(k)}$ используется поток AUSM, описанный в [2]. Для нахождения значений U_j^- внутри треугольника Δ_i необходимо построить вектор-полином по известному среднему значению функции U в треугольнике Δ_i и средним значениям функции U соседних к Δ_i треугольникам и соседних с ними. Как показано в [1], схема с теоретическим четвертым порядком аппроксимации по координате, достигающимся на гладких решениях, предполагает построение кубического полинома с 10 неизвестными коэффициентами.

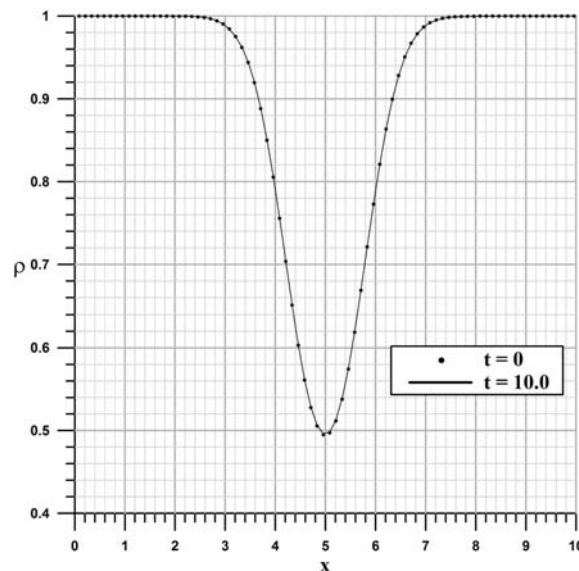


Рис. 1. Рассчитанный по WENO-схеме четвертого порядка аппроксимации профиль плотности.

Описанный выше алгоритм был программно реализован и протестирован для случая начального условия в (1) в виде изоэнтропического вихря. А именно, на основное течение $\rho = 1, p = 1, u = 1, v = 1$ накладывалось возмущение:

$$(\delta u(x, y), \delta v(x, y)) = \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{0.5(1-r^2)}(-\tilde{y}, \tilde{x}), \delta T = -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2}, \delta S = 0, S = p/\rho^\gamma.$$

Обозначения и численные значения геометрических и физических значений приведены в [1]. Расчетная область – квадрат $[0,10] \times [0,10]$. На границах выставлялись периодические граничные условия. На рис. 1 представлен рассчитанный по WENO-схеме четвертого порядка аппроксимации профиль плотности в сечении вихря в момент времени 10.0, что соответствует одному периоду прохождения вихря. Использовался постоянный шаг по времени, равный 0.01.

Литература

1. Hu C., Shu C.-W. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes. – Journal of Computational Physics. – 1999. – V. 150. – P. 97–127.
2. Liou M.-S., Steffen C. J. A new flux splitting scheme. – Journal of Computational Physics. – 1993. – V. 107. – P. 23–39.