

УДК 531.132.1

**Разработка математической модели движения средств воздушного нападения,  
принципов построения модели и ее программной реализации**

А.Д. Парфёнов<sup>1</sup>, П.А. Бабичев<sup>1</sup>, Ю.В. Фадеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

Баллистическая цель (БЦ) – тело, которое большую часть полета совершает по баллистической траектории, то есть находится в неуправляемом движении. Траектория баллистической ракеты состоит из двух участков - активного и пассивного. На активном участке ракета движется с ускорением под действием силы тяги двигателей.

Целью работы является разработка математической модели движения современных и перспективных средств воздушного нападения. В основе лежит модель, описывающая движение баллистических целей и также аэродинамических целей. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Для вычисления необходимых параметров реализуется метод численного интегрирования – метод Эйлера.

В конце приведен макет интерфейса программного обеспечения, реализующего разработанные модели движения средств воздушного нападения.

**Системы координат**

Для описания движения летательного аппарата (ЛА) были выбраны следующие системы координат [1]:

– геоцентрическая система координат (ГСК) – инерциальная система координат, начало которой находится в центре земного шара. Положения точек в системе ГСК могут быть получены в виде пространственных прямоугольных или сферических координат.

На рисунке 1 представлена ГСК в виде сферических координат.

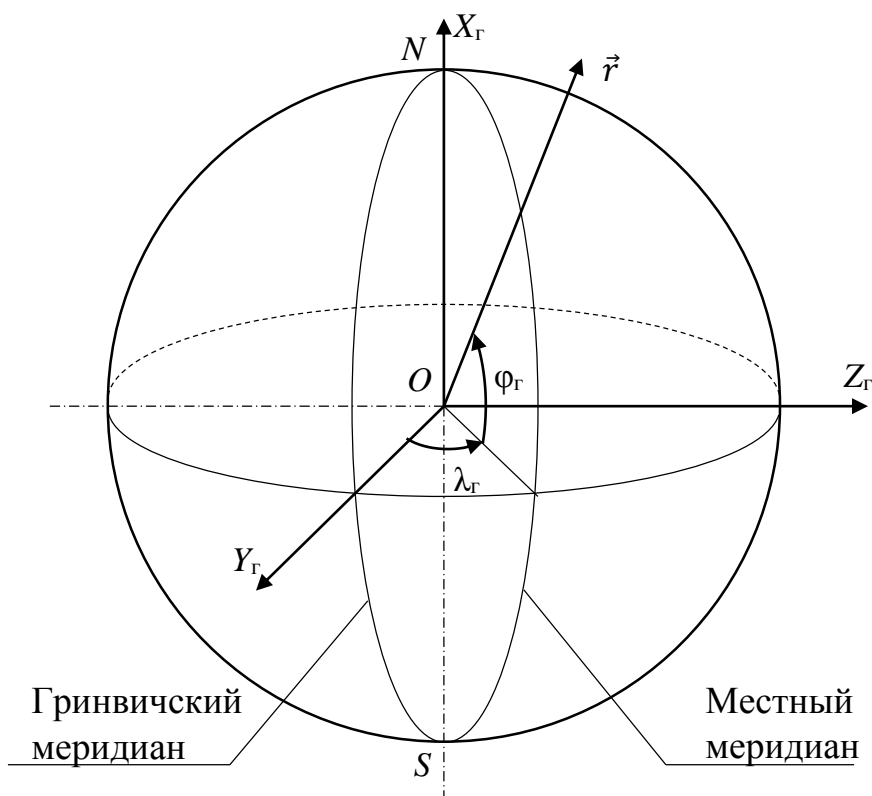


Рис. 1. Геоцентрическая система координат

Где:

- $OX_G, OY_G, OZ_G$ , – направление осей;
- $\lambda$  – долгота;
- $\varphi$  – широта;
- $r$  – радиус-вектор.

Направление осей выбрано следующим образом:

- $OX_G$  направлена на север;
- $OY_G$  направлена на начальный меридиан;
- $OZ_G$  дополняет систему координат до правой.

Долгота  $\lambda$  – угол между начальным и местным меридианами. Диапазон измерений: от минус  $180^\circ$  до  $180^\circ$ ;

Широта  $\varphi$  – угол между местной нормалью и ее проекцией на плоскость экватора. Диапазон измерений: от минус  $90^\circ$  до  $90^\circ$ ;

Радиус-вектор  $r$  – вектор, задающий положение ЛА в ГСК относительно центра Земли.

– Местная земная система координат (МЗСК) – декартова прямоугольная система координат, начало которой находится в заданной точке на поверхности Земли.  
На рисунке 2 представлена МЗСК.

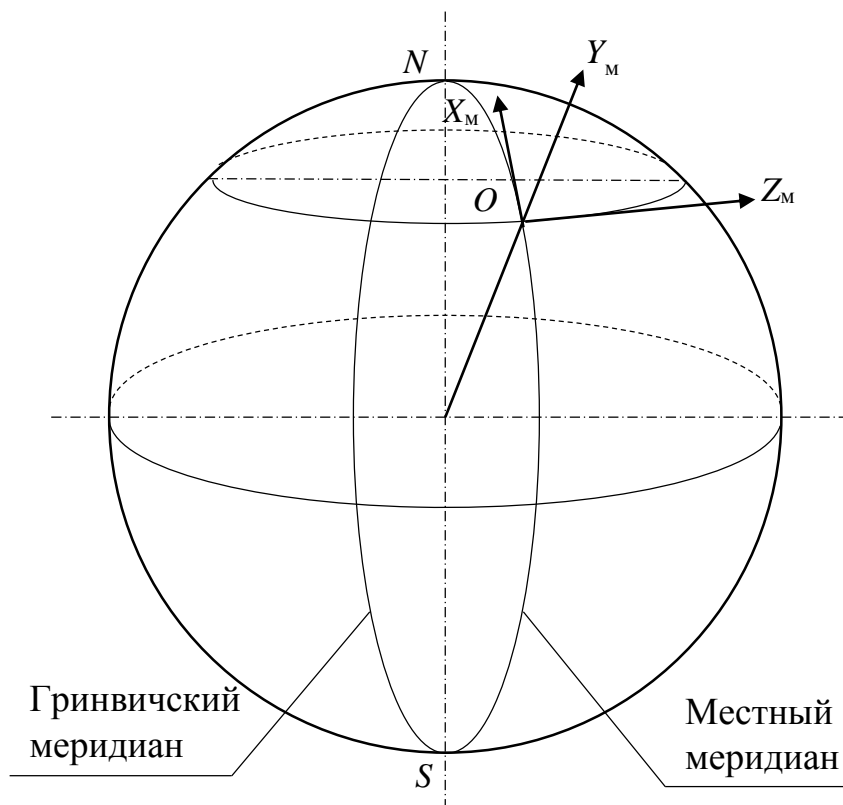


Рис. 2. Местная земная система координат

Где  $OX_M$ ,  $OY_M$ ,  $OZ_M$ , – направление осей.

Направление осей выбрано следующим образом:

- $OX_M$  направлена по касательной к местному меридиану на север;
- $OY_M$  направлена вдоль по местной вертикали;
- $OZ_M$  дополняет систему координат до правой.

– Скоростная система координат (СкСК) – подвижная декартова система координат, начало которой находится в центре масс ЛА и жестко связано с ним.

На рисунке 3 представлена СкСК.

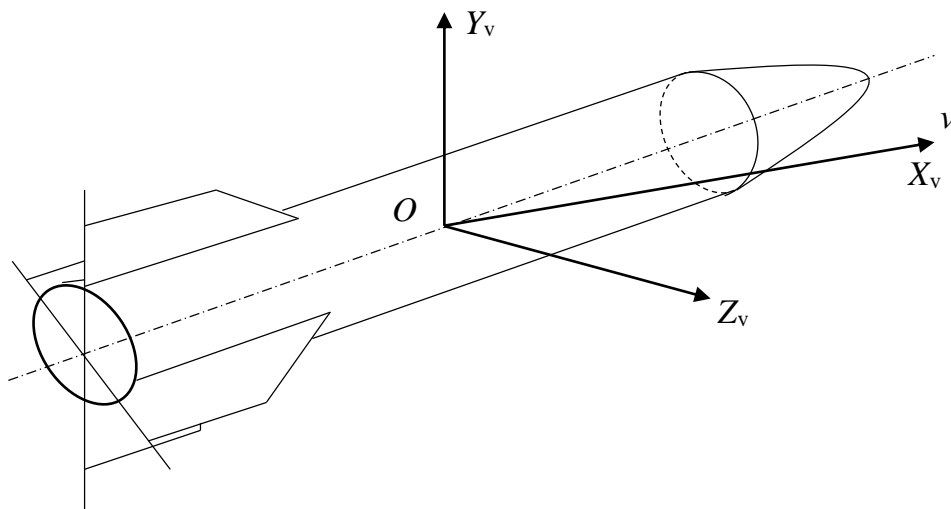


Рис. 3. Скоростная система координат

Где  $Ox_v$ ,  $Oy_v$ ,  $Oz_v$ , – направление осей.

Направление осей выбрано следующим образом:

- $Ox_v$  совпадает с направлением скорости ЛА;
- $Oy_v$  расположена в вертикальной плоскости;
- $Oz_v$  дополняет систему координат до правой.
- Связанная система координат (ССК) – подвижная декартова система координат, начало которой находится в центре масс ЛА и жестко связано с ним.

На рисунке 4 представлена ССК.

На рисунке 4 представлена ССК.

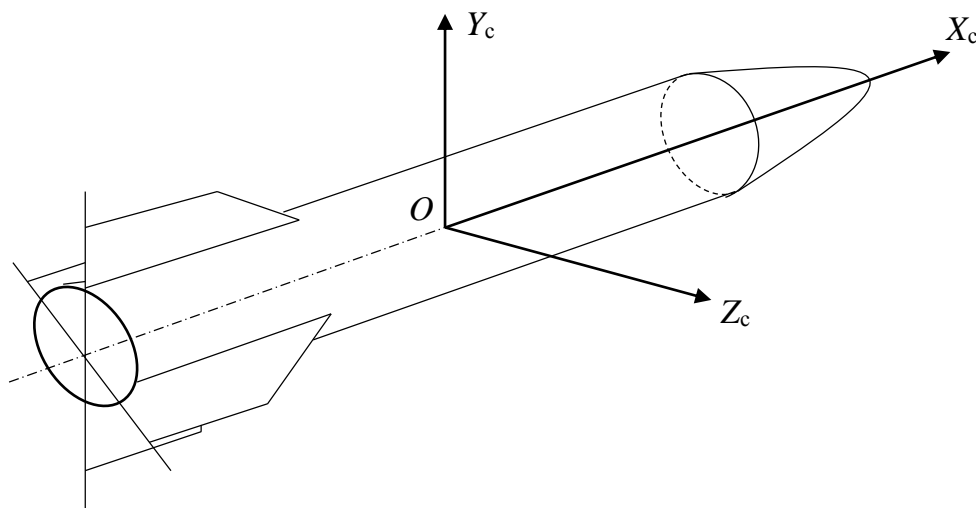


Рис. 4. Связанная система координат

Где  $Ox_c$ ,  $Oy_c$ ,  $Oz_c$ , – направление осей.

Направление осей выбрано следующим образом:

- $OX_c$  совпадает с осью симметрии ЛА и направлена к носовой части;
- $OY_c$  расположена в плоскости симметрии ЛА и направлена к верхней части ЛА;
- $OZ_c$  дополняет систему координат до правой.

Положение начала МЗСК в ГСК задано углами  $\lambda_\Gamma, \varphi_\Gamma$  (рис. 5.).

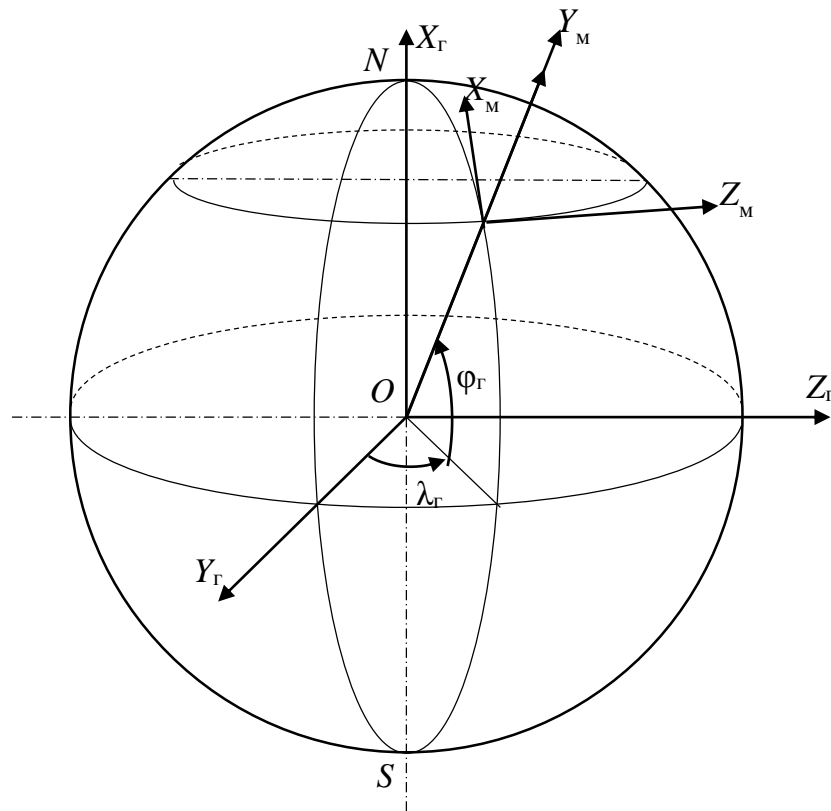


Рис. 5. Переход от ГСК к МЗСК

Матрица перехода:

$$M_{\text{МГ}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cos \lambda & \sin \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ориентация вектора при переходе от ГСК к МЗСК задается формулой:

$$\vec{x}_\text{М} = M_{\text{МГ}} \vec{x}_\text{Г}. \quad (2)$$

Положение ЛА в МЗСК относительно ГСК задано формулой:

$$\vec{r}_\text{М} = M_{\text{МГ}} \vec{r}_\text{Г} + \vec{R}_{O_\text{М}}, \quad (3)$$

где:

- $\vec{r}_\text{М}$  – радиус-вектор положения ЛА в МЗСК,
- $\vec{r}_\text{Г}$  – радиус-вектор положения ЛА в ГСК,

- $\vec{R}_{O_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_3 \\ 0 \end{pmatrix}$  задает положение центра Земли в МЗСК.

Ориентация СкСК относительно МЗСК задана углами  $\theta$  и  $\psi$  (рисунок 6):

- угол наклона траектории  $\theta$  – угол между осью  $OX_v$  и ее проекцией на горизонтальную плоскость  $OX_MZ_M$ . Диапазон измерений: от минус  $90^\circ$  до  $90^\circ$ ;
- угол курса  $\psi$  – угол между осью  $OX_M$  и проекцией оси  $OX_v$  на горизонтальную плоскость  $OX_MZ_M$ . Диапазон измерений: от минус  $180^\circ$  до  $180^\circ$ .

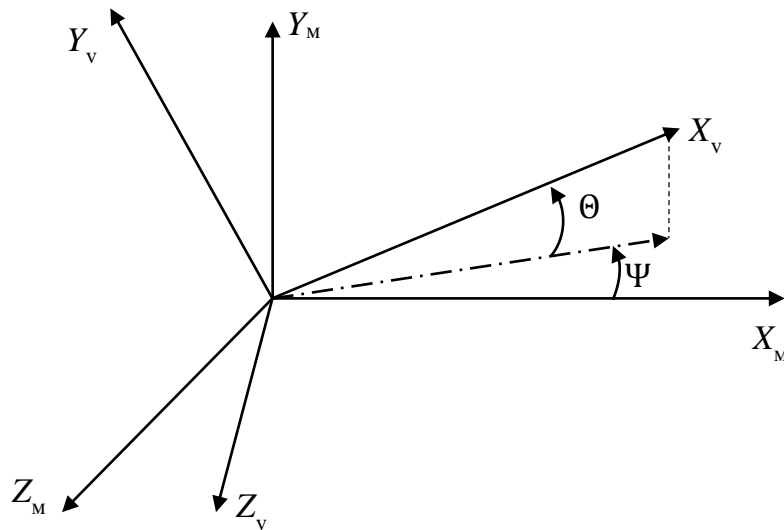


Рис. 6. Переход от МЗСК к СкСК

Матрица перехода:

$$M_{vM} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Ориентация вектора при переходе от МЗСК к СкСК задается формулой:

$$\vec{x}_v = M_{vM} \vec{x}_M. \quad (5)$$

Ориентация ССК относительно СкСК задана углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 7.):

- угол атаки  $\alpha$  – угол между продольной осью  $OX_c$  и проекцией скорости  $\vec{V}$  ЛА на плоскость  $OX_cY_c$ . Диапазон измерений: от минус  $180^\circ$  до  $180^\circ$ ;
- угол скольжения  $\beta$  – угол между направлением скорости  $\vec{V}$  ЛА и ее проекцией на плоскость  $OX_cY_c$ . Диапазон измерений: от минус  $90^\circ$  до  $90^\circ$ .

Матрица перехода:

$$M_{cv} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

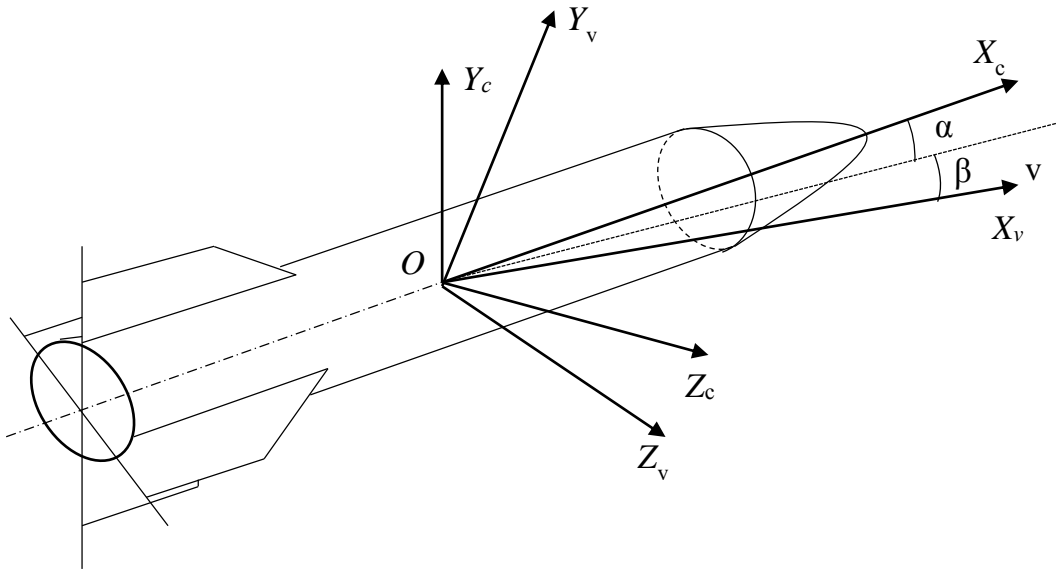


Рис. 7. Переход от СкСК к ССК

Ориентация вектора при переходе от СкСК к ССК задается формулой:

$$\vec{x}_c = M_{cv} \vec{x}_v. \quad (7)$$

Переход от МЗСК к ССК осуществляется путем двух последовательных переходов: от МЗСК к СкСК и от СкСК к ССК. Соответственно, матрица для перехода от МЗСК к ССК получается перемножением двух матриц, а именно:

$$M_{cm} = M_{cv} M_{vm}. \quad (8)$$

Тогда формула перехода:

$$\vec{x}_c = M_{cv} M_{vm} \vec{x}_m. \quad (9)$$

### Внешние условия полета и принципы построения моделей движения баллистических и аэродинамических целей

Для построения моделей движения приняты следующие допущения:

- за модель Земли принимается сфера известного радиуса:

$$R_3 = 6356,767 \text{ км};$$

- поле тяготения центральное. Ускорение силы тяжести определяется по формуле:

$$g = g_c \left( \frac{R_3}{R_3 + H} \right)^2, \quad (10)$$

где:

- $H$  – текущая высота полета,
- $g_c = 9,80665 \text{ м/с}^2$  – стандартное ускорение свободного падения;
- центр масс Земли совпадает с геометрическим центром сферы;
- вращение Земли не учитывается;
- параметры атмосферы принимаются в соответствии с ГОСТ 4401-81 «Атмосфера стандартная. Параметры» [2];
- влияние ветра не учитывается.

Движение БЦ описывается с помощью второго закона Ньютона следующим образом [3] (рис. 8.):

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_a + m\vec{g}, \quad (11)$$

где:

- $m$  – масса ракеты, кг;
- $\vec{a}$  – ускорение, м/с<sup>2</sup>;
- $\vec{g}$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;
- $\vec{P}$  – тяга, Н;
- $\vec{R}_a$  – полная аэродинамическая сила, Н.

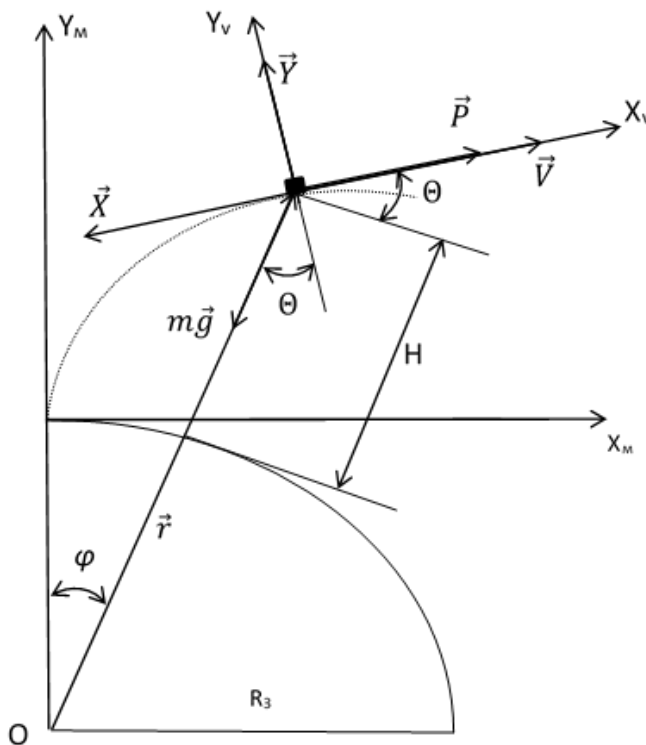


Рис. 8. Направление сил



В проекциях на оси СкСК уравнение движения принимает вид [4]:

$$(OX_v): m\dot{V} = P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \Theta, \quad (12)$$

$$(OY_v): mV\dot{\Theta} = P \sin \alpha + Y - mg \cos \Theta, \quad (13)$$

$$(OZ_v): mV \cos \Theta \dot{\Psi} = P \cos \alpha \sin \beta - Z, \quad (14)$$

где:

- $X$  – сила сопротивления,
- $Y$  – подъемная сила, Н;
- $Z$  – боковая сила, Н;
- $\alpha, \beta$  – углы атаки и скольжения соответственно.

Движение БЦ рассматривается в одной плоскости. Поэтому можно принять угол скольжения  $\beta$  равным нулю, следовательно  $Z = 0$ . Также, стабильный полет БЦ происходит на малых углах атаки. Поэтому принимаем  $\cos \alpha = 1$  и  $\sin \alpha = \alpha$ . Уравнения примут следующий вид:

$$m\dot{V} = P - X - mg \sin \Theta, \quad (15)$$

$$mV\dot{\Theta} = P\alpha + Y - mg \cos \Theta, \quad (16)$$

$$\dot{\Psi} = 0. \quad (17)$$

Пространственное движение БЦ описывается в МЗСК точки старта:

$$\dot{X}_M = V_{Mx}, \quad (18)$$

$$\dot{Y}_M = V_{My}, \quad (19)$$

$$\dot{Z}_M = V_{Mz}, \quad (20)$$

$$\vec{V}_M = M_{MV} \vec{V}_V. \quad (21)$$

Итоговая система уравнений (15) – (20), описывающих движение БЦ:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - mg \sin \Theta, \\ mV\dot{\Theta} &= P\alpha + Y - mg \cos \Theta, \\ \dot{\Psi} &= 0, \\ \dot{X}_M &= V_{Mx}, \\ \dot{Y}_M &= V_{My}, \\ \dot{Z}_M &= V_{Mz}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Интегрирование представленной системы уравнений позволит получить необходимые параметры для выведения модели движения баллистической цели.

Важнейшим свойством управляемого ЛА является его маневренность. Под маневренностью ЛА будем понимать возможную для него быстроту изменения скорости полета по величине и направлению [5].

Пусть  $\vec{N}$  – равнодействующая всех сил, действующих на ЛА, за исключением силы тяжести. Тогда вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{G}, \quad (23)$$

представляющий собой отношение к весу ЛА геометрической суммы всех сил, действующих на аппарат, кроме силы тяжести, называется вектором перегрузки. Вектор перегрузки характеризует величину и направление той силы  $\vec{N}$ , изменяя которую мы управляем полетом.

Пользуясь понятием перегрузки, динамические уравнения системы (22) запишем в следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \dot{V} &= n_x - \sin \Theta, \\ \frac{1}{g} V \dot{\Theta} &= n_y - \cos \Theta, \\ \frac{1}{g} V \cos \Theta \dot{\Psi} &= -n_z. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

С помощью безразмерных уравнений движения (24) легко установить связь между величинами проекций перегрузок и характером траектории ЛА.

Для противодействия стрельбе ЛА могут применять различные виды маневра: разгон и торможение, вираж, пикирование, горку и др. [6].

Разгон и торможение – наиболее простые виды маневра ЛА. Их осуществление зависит от диапазона скоростей, то есть от разницы между минимально допустимой и максимальной скоростями горизонтального полета.

Виразом принято называть криволинейный полет ЛА в горизонтальной плоскости. Установившийся вираз характеризуется постоянным радиусом и скоростью.

Пикированием называется снижение ЛА по прямолинейной траектории, наклоненной к горизонту под большим углом. При пикировании ЛА за сравнительно малое время значительно теряет высоту. Траектория пикирующего ЛА включает три характерных участка: участок ввода в пикирование, участок пикирования и участок выхода из пикирования.

Горкой называют маневр ЛА в вертикальной плоскости, используемый для быстрого набора высоты при неизменном направлении полета.

При противодействии управлению и стрельбе воздушные цели могут комбинировать несколько маневров, создавая сложные маневры.

## Выводы

В результате работы можно выделить следующие пункты:

– для моделирования движения средств воздушного нападения использованы следующие системы координат:

- а) геоцентрическая система координат;
- б) местная земная система координат;
- в) скоростная система координат;
- г) связанная система координат.

Представлены соответствующие матрицы перехода;

– внешние условия полета выбраны в соответствии с требованиями поставленной задачи;

– формульное описание математической модели движения баллистических целей представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которой позволяет получить кинематические параметры движения рассматриваемых объектов;

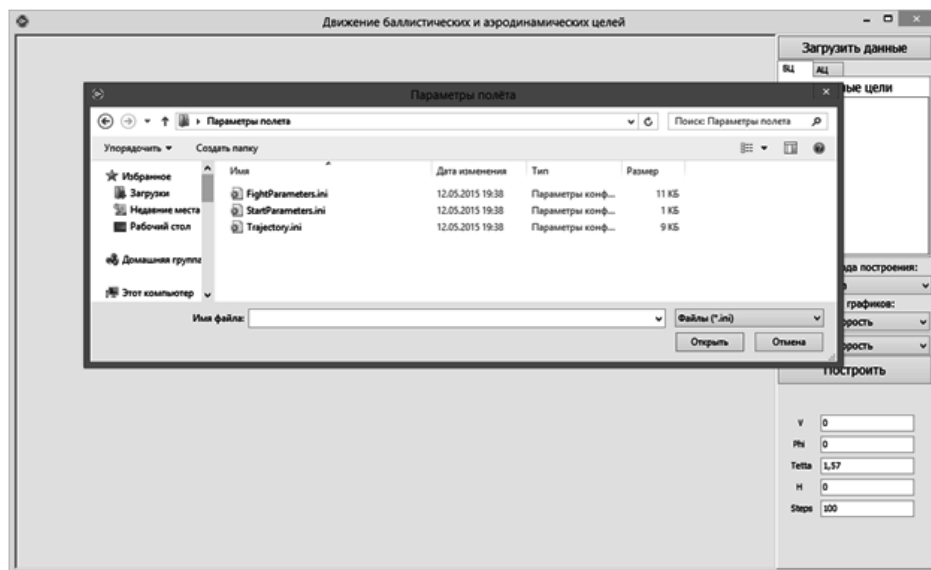
– формульное описание математической модели движения аэродинамических целей представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которой позволяет получить кинематические параметры движения рассматриваемых объектов с учетом воздействия управляющих перегрузок;

– выбранный метод интегрирования – метод Эйлера – является нетребовательным к быстродействию средств вычислительной техники, при этом обеспечивает достаточную для данной задачи точность расчета.

В представленных ниже рисунках 9а-9в приведены скриншоты примеров работы соответствующего интерфейса для моделирования движения баллистических ракет.



а. Пример 1.



б. Пример 2.



в. Пример 3.

Рис. 10. Интерфейс ПО

## Литература

1. ГОСТ 20058-80 Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения / под ред. Р.С. Федоровой, В.Н. Мальковой, А.В. Прокофьевой – М.: Издательство стандартов, 1981. – 54 с.
2. ГОСТ 4401-81 Атмосфера стандартная. Параметры / под ред. О.В. Гелемеевой, О.Н. Власовой, А.С. Черноусовой – М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. – 181 с.
3. *Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф.* Баллистика ракет. – М.: Машиностроение, 1970. – 224 с.
4. *Лебедев А.А., Карабанов В.А.* Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1965. – 528 с.
5. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
6. *Неупокоев Ф.К.* Стрельба зенитными ракетами. – М.: Военное издательство, 1991. – 343 с.