УДК 519.171.1

Об 1-базе функциональных и контрафункциональных графов.

А.Э. Фомина

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

I Основные определения

Основные понятия из теории графов приводятся в соответствии с [1].

Под *ориентированным графом (орграфом)* понимается пара $\vec{G} = (V,\ \alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины орграфа), а $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение смежности на множестве V (пара $(u, v) \in\ \alpha$ называется дугой орграфа). Дуга (u, v) *инцидентна* вершинам u и v, где u – начало, а v – конец дуги.

Неориентированный граф (или, для краткости, *граф*) – это пара $G = (V,\ \alpha)$, где α – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. *Симметризацией орграфа* $\vec{G}$ является граф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) - \Delta)$.

Орграф $\vec{T}$ называется *выходящим деревом*, если в нем существует корень (т.е. вершина, из которой достижима любая другая вершина) и если его симметризация T является деревом. Орграф $\vec{T}$ будем называть *входящим деревом*, если обратный для него орграф $\vec{T}^{-1}$ представляет собой выходящее дерево.

Путь в неориентированном графе – это последовательность ребер, в которой любые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом считается, что оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним ребер пути. Путь называется *циклическим*, если в нём начальная и конечная вершина совпадают. В *простом пути* каждая вершина принадлежит не более чем двум ребрам. *Цикл* – простой циклический путь.

В орграфе *маршрутом* будем называть последовательность дуг $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n)$ $\left((v_{i-1,} v_i) \in \alpha,\ \ \forall\, i = \overline{1, n}\right)$, а *путём* – маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза. *Простой путь* – путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам. *Контур* – простой циклический путь. *Цепь* – простой путь, не являющийся контуром. Под *длиной маршрута* будем подразумевать количество составляющих его дуг.

Пусть $\vec{G} = (V, \alpha)$ – некоторый орграф, $v \in V$ – одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины v называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\vec{G}$, имеющих своим началом вершину v. *Степень захода* вершины v – это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом.

1-базой орграфа называют минимальный набор S таких попарно несмежных вершин, что любая вершина орграфа $\vec{G}$ или принадлежит S, или смежна из некоторой вершины множества S [2].

Орграф называется четным, если в его симметризации все циклы содержат четное число ребер [3].

Теорема (фон Нейман и Моргенштерн [4]). Каждый бесконтурный орграф имеет единственную 1-базу.

Теорема (Ричардсон [3]). Если орграф четный, то 1-база существует.

II 1-база функционального графа

Орграф называется функциональным графом, если $d^+(v) = 1$ для любой его вершины v (т.е. если из каждой вершины исходит точно одна дуга).

Функциональный граф может быть представлен в виде контура с входящими в него деревьями, следовательно, теорема фон Неймана и Моргенштерна и одноименный алгоритм не могут быть использованы для поиска 1-базы. Для случая, когда контур функционального графа содержит четное число вершин (четный контур), другими словами, симметризация функционального графа не содержит циклов нечетной длины, можно использовать теорему Ричардсона. Интерес представляет случай, когда контур функционального графа содержит нечетное количество вершин (нечетный контур). Далее речь будет идти именно о таких орграфах.

Назовем вершину функционального графа *правильной*, если она входит в состав контура, является корнем входящего дерева и не принадлежит 1-базе этого дерева.

Заметим, что у произвольного входящего дерева 1-база существует, причем единственная, в соответствии с теоремой фон Неймана и Моргенштерна.

Теорема 1. Если функциональный граф имеет хотя бы одну правильную вершину, то у этого орграфа существует 1-база.

Доказательство. Пусть вершина $v \in V$ – единственная правильная вершина в функциональном графе $\vec{G} = (V, \alpha)$, и пусть граф $\vec{G}$ содержит единственное входящее дерево $\vec{T}$.

По определению, вершина v входит в состав контура орграфа $\vec{G}$, $\vec{T}$ имеет вершину v своим корнем, и v не принадлежит 1-базе дерева $\vec{T}$.

Если вершина v не входит в состав 1-базы указанного дерева, то, по определению 1-базы, v смежна из некоторой вершины u этого дерева. Построим 1-базу входящего дерева $\vec{T}$, получим множество $S' = \{t_1, t_2, \dots t_m, u\}$, где $t_1, t_2, \dots t_m, u -$ вершины входящего дерева.

Очевидно, что $S' \subset S$, где S – 1-база орграфа $\vec{G}$. Вершина v смежна из вершины $u \in S$, т.е. $v \notin S$. Следовательно, по определению 1-базы, от вершины v не зависит включение в 1-базу вершины контура, смежной из v, и вершины контура, из которой смежна сама v.

Получаем, что с точки зрения построения 1-базы функциональный граф $\vec{G}$ распадается на две части: входящее дерево $\vec{T}$ и цепь $\vec{P}_{k-2}$ длины $k-2$, где k – длина контура орграфа $\vec{G}$. Цепь $\vec{P}_{k-2}$ получается из контура удалением правильной вершины и двух инцидентных ей дуг. $\vec{P}_{k-2}$ как бесконтурный орграф имеет единственную 1-базу.

Для построения 1-базы S'' полученной цепи $\vec{P}_{k-2}$ необходимо включить в множество S'' вершины этой цепи через одну, начиная с источника.

По построению получили, что $S = S' \cup S''$. ■

Замечание. Для случая, когда функциональный граф имеет более одной правильной вершины, поиск 1-базы сводится к поиску 1-баз всех входящих деревьев и 1-баз цепей, на которые разбивается контур функционального графа после удаления из него всех правильных вершин и инцидентных им дуг.

Теорема 2. Если у функционального графа с нечетным контуром существует 1-база, то он имеет по крайней мере одну правильную вершину.

Доказательство. От противного. Пусть задан функциональный граф $\vec{G} = (V, \alpha)$ с нечетным контуром, S – 1-база орграфа $\vec{G}$, и $\vec{G}$ не имеет ни одной правильной вершины.

Если правильные вершины отсутствуют, то орграф $\vec{G}$ не содержит ни одного входящего дерева, или каждая вершины контура, являющаяся корнем некоторого входящего дерева, входит в 1-базу соответствующего дерева.

Если орграф $\vec{G}$ не содержит ни одного входящего дерева, то $\vec{G}$ представляет собой контур нечетной длины, и, следовательно, $\vec{G}$ не имеет 1-базы. Получили противоречие условию существования 1-базы орграфа $\vec{G}$.

Пусть в контуре орграфа $\vec{G}$ каждая вершина, являющаяся корнем некоторого входящего дерева, входит в 1-базу соответствующего дерева.

Тогда 1-базы всех входящих деревьев определяются однозначно. Однако корни этих деревьев – вершины контура – могут быть исключены из 1-базы функционального графа, если окажутся смежными из некоторой вершины контура, включенной в 1-базу.

Распределение в 1-базу остальных вершины контура зависит только от соседних с ними по контуру вершин.

Следовательно, ни для одной вершины контура до конца не выяснено, входит ли она в 1-базу функционального графа. То есть построение 1-базы заданного условием функционального графа сводится к поиску 1-базы в контуре нечетной длины. Но у контура нечетной длины 1-базы не существует, поэтому не существует 1-базы функционального графа. Получаем противоречие условию существования 1-базы. ■

Таким образом, доказан критерий существования 1-базы для функционального графа:

для того чтобы у функционального графа с нечетным контуром существовала 1-база, необходимо и достаточно, чтобы этот орграф имел по крайней мере одну правильную вершину.

Критерий может также быть сформулирован следующим образом:

функциональный граф, содержащий контур нечетной длины, имеет 1-базу тогда и только тогда, когда корень входящего дерева, полученного путём стягивания всех вершин контура первоначального орграфа в одну вершину, не входит в 1-базу этого дерева.

Таким образом, 1-база:

1. существует у функционального графа с четным контуром и у функционального графа, содержащего нечетный контур и по крайней мере одну правильную вершину;
2. не существует у функционального графа с нечетным контуром, не содержащим правильных вершин.

III 1-база контрафункционального графа

Орграф по определению является контрафункциональным графом, если орграф $\vec{G}^{-1} = (V, \alpha^{-1})$ функционален (т.е. если $(d^{-}(v) = 1, \forall v \in V)$).

Контрафункциональный граф представим в виде контура с выходящими из него деревьями. Следовательно, теорема фон Неймана и Моргенштерна для таких орграфов также не применима. Однако, в том случае, если контрафункциональный граф имеет контур четной длины (четный контур), то 1-базу можно построить, используя теорему Ричардсона.

Теорема 3. Контрафункциональный граф с нечетным контуром не имеет ни одной 1-базы.

Доказательство. Все выходящие деревья, имеющие своим корнем вершину из контура, имеют 1-базу.

Из определения 1-базы можно сделать вывод, что для установления, входит ли конкретная вершина в 1-базу, имеют значение только входящие в эту вершину дуги. Так как именно они позволяют определить, не является ли вершина смежной из 1-базы (если нет, то она должна быть включена в 1-базу).

Каждая вершина контрафункционального графа имеет степень захода равную 1, следовательно, все вершины имеют только одну входящую дугу. Для вершин контура единственная входящая дуга – это дуга, входящая в состав контура. Таким образом, включение вершин контура в 1-базу зависит только от соседних по контуру вершин, и выходящие деревья, если они есть в орграфе, не влияют на статус вершины. То есть получаем задачу построения 1-базы контура нечетной длины. Такой контур не имеет 1-базы. А значит, и контрафункциональный граф с нечетным контуром не имеет 1-базы. ■

IV Заключение

В работе найдены условия существования 1-базы для важнейших классов графов: функциональных и контрафункциональных. Для обоих классов в случае четного контура 1-база может быть построена с использованием метода Ричардсона.

Для функционального графа с нечетным контуром и по крайней мере одной правильной вершиной процесс построения 1-базы разбивается на два этапа:

1. построение 1-базы для каждого входящего дерева;
2. построение 1-базы для цепей, на которые контур разбивается правильными вершинами.

Каждый этап можно осуществить одним из двух методов:

- методом фон Неймана и Моргенштерна;
- методом Ричардсона.

Контрафункциональный граф с нечетным контуром не имеет 1-базы.

Литература

1 *Боголюбов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 368 с.

2 *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 304 с.

3 *Richardson M.* On weakly ordered systems. – Bulletin of the American Mathematical Society. – 1946. – Vol. 52. No 2. – P. 113-116.

4 *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игра и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.