УДК 621.396.97

Обнаружение события наличия хотя бы одного полезного сигнала в канале в системе с двумя приемными каналами

А.В. Аверин[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца

Как и в постановке задачи [2], будем считать, что в каждом приемном канале наблюдается смесь $y_m=\theta_m s_m+n_m$ детерминированных полезных сигналов s_m и белых гауссовских шумов n_m (m=1,2). В работе [1] показано, что, в соответствии с обобщенным критерием Неймана-Пирсона, алгоритм оптимального обнаружения события $C_{11\cup 01\cup 10}$ в двухканальной системе, когда интересует наличие полезного сигнала хотя бы в одном приемном канале имеет вид

$$\Lambda_{11,01,10} = e^{Y_1-q_1} + e^{Y_2-q_2} + e^{Y_1-q_1+Y_2-q_2} \geq h \ , \qquad (1)$$

где:

$Y_m = \dfrac{1}{N_m}\int\limits_0^T y_m(t)s_m(t)dt$ − сигнал на выходе согласованного фильтра m-го канала,

$q_m = \dfrac{1}{2N_m}\int\limits_0^T s_m^2(t)dt$ − отношение сигнал/шум в m-том канале.

Вычисляя среднее значение и дисперсию гауссовских случайных величин [2] $z_m= Y_m -q_m$ при разных значениях параметров θ_m, находим

$$\theta_1 = 0, \; Y_1 = \frac{1}{N_1}\int_0^T n_1(t)s_1(t)dt, \; \langle z_1 \rangle = \langle Y_1 \rangle - q_1 = -q_1$$

$$\sigma_{z_1}^2 = \left\langle \left(z_1 - \langle z_1 \rangle \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left[Y_1 - q_1 + q_1 \right]^2 \right\rangle = \frac{1}{N_1^2}\int\int_0^T N_1 \delta\left(t - t'\right) s_1\left(t\right) s_1\left(t'\right) dt dt' = \frac{\int_0^T s_1^2(t)dt}{N_1} = 2q_1$$

Аналогично, при $\theta_2 = 0$ получаем $\langle z_2 \rangle = -q_2$, $\sigma_{z_2}^2 = 2q_2$.

При $\theta_1 = 1$ имеем $Y_1 = \frac{1}{N_1}\int_0^T \left(n_1(t) + s_1(t) \right) s_1(t) dt = 2q_1 + \frac{1}{N_1}\int_0^T n_1(t)s_1(t)dt$,

$z_1 = \frac{1}{N_1}\int_0^T n_1(t)s_1(t)dt - q_1$, так что

$$\langle z_1 \rangle = q_1, \quad \sigma_{z_1}^2 = \left\langle \left(z_1 - \langle z_1 \rangle \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{N_1^2}\int\int_0^T N_1 \delta\left(t - t'\right) S_1\left(t\right) S_1\left(t'\right) dt dt = 2q_1 .$$

Аналогично, при $\theta_2 = 1$ получаем $\langle z_2 \rangle = q_2$; $\sigma_{z_2}^2 = 2q_2$.

Представив выражение (1) в форме $\Lambda_{11,01,10} = e^{z_1} + e^{z_2} + e^{z_1 + z_2} = \left(1 + e^{z_1}\right)\left(1 + e^{z_2}\right) - 1$, видим, что в качестве достаточной статистики для сравнения с порогом можно принять величину

$$\eta = \ln\left(\Lambda_{11,01,10} + 1 \right) = \ln\left(1 + e^{z_1}\right) + \ln\left(1 + e^{z_2}\right). \tag{2}$$

Если $\eta < h$, то принимается решение, что событие $C_{11 \cup 01 \cup 10}$ не наступило, если $\eta > h$, то события $C_{11 \cup 01 \cup 10}$ наступило.

Видно, что при взаимной независимости наблюдаемой смеси полезных сигналов и шумов на приемных пунктах $y_1(t)$ и $y_2(t)$ достаточная статистика η формируется на каждом приемном пункте независимо друг от друга ($\eta = \eta_1 + \eta_2$).

Перейдем к расчету характеристик обнаружения события $C_{11 \cup 01 \cup 10}$ в двухканальной системе. Характеристическая функция случайной величины $\eta_1 = \ln\left(1 + e^{z_1}\right)$ представляется выражением

$$f_{\eta_1}(\upsilon)=\left\langle e^{i\upsilon\eta_1}\right\rangle=\left\langle e^{i\upsilon\ln\left(1+e^{z_1}\right)}\right\rangle=\left\langle\left(1+e^{z_1}\right)^{i\upsilon}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+e^{z_1}\right)^{i\upsilon}e^{-\frac{\left(z_1-\overline{z_1}\right)^2}{2\sigma_{z_1}^2}}dz_1.$$

Взяв обратное преобразование Фурье

$$P_{\eta_1}(\eta_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\upsilon)^{-i\upsilon\eta_1}d\upsilon=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_{z_1}}\int_{-\infty}^{\infty}d\upsilon\int_{-\infty}^{\infty}dz_1\left(1+e^{z_1}\right)^{i\upsilon}e^{-\frac{\left(z_1-\overline{z_1}\right)^2}{2\sigma_{z_1}^2}}e^{-i\upsilon\eta_1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_{z_1}}\int_{-\infty}^{\infty}dz_1e^{-\frac{\left(z_1-\overline{z_1}\right)^2}{2\sigma_{z_1}^2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\upsilon e^{i\upsilon\left[-\eta_1+\ln\left(1+e^{z_1}\right)\right]}$$

и вычислив интеграл с дельта-функцией, получаем плотность вероятности

$$P_{\eta_1}(\eta_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z_1}}\frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_1}-1}\exp\left\{\frac{\left[\ln\left(e^{\eta_1}-1\right)-\overline{z_1}\right]^2}{2\sigma_{z_1}^2}\right\},\quad \eta_1\geq 0. \tag{3}$$

Аналогичная плотность вероятности $P_{\eta_2}(\eta_2)$ после замены нижних индексов «1» на «2» справедлива для случайной величины η_2, а плотность вероятности достаточной статистики $\eta=\eta_1+\eta_2$ представляется сверткой

$$P(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}P_{\eta_1}(\eta-\xi)P_{\eta_2}(\xi)d\xi,$$

что приводит к следующему выражению

$$P_{\theta_1\theta_2}(\eta)=\frac{1}{2\pi\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}}\int_0^{\eta}\frac{e^{\eta-\xi}}{e^{\eta-\xi}-1}\cdot\frac{e^{\xi}}{e^{\xi}-1}\exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(e^{\eta-\xi}-1\right)-\overline{z_1}\right]^2}{2\sigma_{z_1}^2}-\frac{\left[\ln\left(e^{\xi}-1\right)-\overline{z_2}\right]^2}{2\sigma_{z_2}^2}\right\}d\xi, \tag{4}$$

где пределы интегрирования определены условиями $\xi\geq 0$ и $\eta-\xi\geq 0$, средние величины имеют значения

$$\overline{z_1}=\begin{cases}-q_1 \;\; при \;\; \theta_1=0,\\ q_1 \;\; при \;\; \theta_1=1.\end{cases},\qquad \overline{z_2}=\begin{cases}-q_2 \;\; при \;\; \theta_2=0,\\ q_2 \;\; при \;\; \theta_2=1.\end{cases},$$

дисперсии равны $\sigma_{z_m}^2 = 2q_m$, а нижние индексы $\theta_1\theta_2$ в $P_{\theta_1\theta_2}(\eta)$ добавлены, чтобы различать плотности вероятности величины η при разных событиях $C_{\theta_1\theta_2}$.

Выражение (4) может быть использовано для расчета характеристик обнаружения событий в системе с двумя приемными каналами при приеме полезного сигнала хотя бы одним из каналов. Например, вероятность пропуска события $C_{11\cup01\cup10}$ равна

$$\alpha = \frac{1}{3}\cdot\int_0^h \left(P_{11}(\eta) + P_{01}(\eta) + P_{10}(\eta)\right) d\eta =$$
$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{q_1 q_2}} \int_0^h d\eta \int_0^\eta d\xi \, \frac{e^\eta}{e^{\eta-\xi}-1} \cdot \frac{1}{e^\xi - 1} \cdot \left(\exp\left\{ -\frac{\left[\ln\left(e^{\eta-\xi}-1\right)-q_1\right]^2}{4q_1} - \frac{\left[\ln\left(e^{\xi}-1\right)-q_2\right]^2}{4q_2} \right\} \right.$$
$$\left. + \exp\left\{ -\frac{\left[\ln\left(e^{\eta-\xi}-1\right)+q_1\right]^2}{4q_1} - \frac{\left[\ln\left(e^{\xi}-1\right)-q_2\right]^2}{4q_2} \right\} + \exp\left\{ -\frac{\left[\ln\left(e^{\eta-\xi}-1\right)-q_1\right]^2}{4q_1} - \frac{\left[\ln\left(e^{\xi}-1\right)+q_2\right]^2}{4q_2} \right\} \right)$$

где h – величина порога.

Однако, удобнее пользоваться для этой цели двухмерной плотностью вероятности

$$P_{11}(\eta_1,\eta_2) = P_{\eta_1}(\eta_1) P_{\eta_2}(\eta_2) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2\sqrt{q_1 q_2}} \frac{e^{\eta_1+\eta_2}}{\left(e^{\eta_1}-1\right)\cdot\left(e^{\eta_2}-1\right)} \exp\left\{ -\frac{\left[\ln\left(e^{\eta_1}-1\right)-q_1\right]^2}{4q_1} - \frac{\left[\ln\left(e^{\eta_2}-1\right)-q_2\right]^2}{4q_2} \right\}, \quad \eta_1 \ge 0, \eta_2 \ge 0$$

При заданном пороге h вероятность α пропуска события $C_{11\cup01\cup10}$ равна интегралу по области, в которой $\eta_1 + \eta_2 < h$,

$$\alpha = \frac{1}{3}\cdot \int\limits_{\eta_1+\eta_2<h}\int P_{11}(\eta_1,\eta_2) + P_{01}(\eta_1,\eta_2) + P_{10}(\eta_1,\eta_2)\, d\eta_1 d\eta_2 \,. \tag{5}$$

Вероятность ложной тревоги с учетом нормировочного коэффициента рассчитывается по следующей формуле

$$\beta = 1 - \iint\limits_{\eta_1+\eta_2<h} P_{00}(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_1 d\eta_2\,. \qquad (6)$$

Здесь уместно привести выражения для расчета вероятностей ложной тревоги $P_{лт}$ и обнаружения для двухпозиционного радиолокатора [3]:

$$P_{лт} = \frac{1}{2}\cdot\left[1 - erf\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

$$P_{о} = \frac{1}{2}\cdot\left[1 - erf\left(\frac{u_0 - q_{вых}}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где $q_{вых} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} q^2_{вых\ \mathrm{i}}}$,

$q^2_{вых\ \mathrm{i}}$ – «частное» отношение сигнал-шум на выходе i-й позиции,

u_0 – нормированный пороговый уровень.

На рис. 1 приведены функции вероятности правильного обнаружения для двухпозиционного радиолокатора (1) и системы регистрации событий с двумя приемными каналами (2).

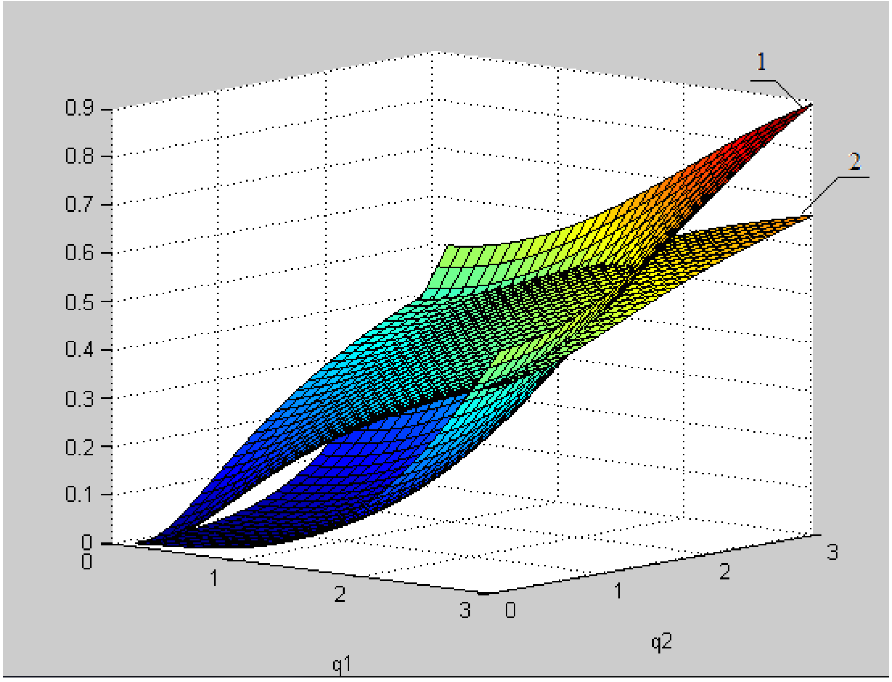

Рис.1. Вид функции вероятности правильного обнаружения для двухпозиционного радиолокатора (1) и системы регистрации событий с двумя приемными каналами (2) в зависимости от отношения сигнал/шум в каждом пункте обработки при пороге $h = 3$

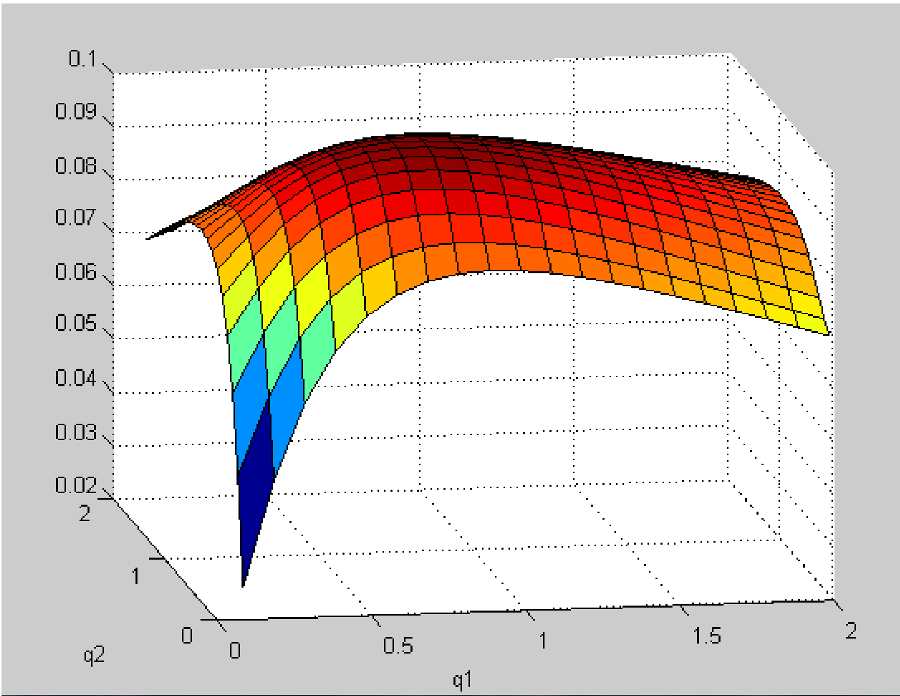

Рис.2. Вид функции вероятности ложной тревоги в зависимости от отношения сигнал/шум в каждом канале при пороге $h = 3$ в системе с двумя приемными каналами

Вероятность правильного обнаружения системы регистрации событий с двумя приемными каналами в области значений сигнал/шум от 0 дБ до 2 дБ выше, чем в двухпозиционном радиолокаторе (рис.1.).

Литература

1. *Аверин А.В.* Оптимальное обнаружение событий при приеме сигналов со случайными распределениями амплитуды и фазы в системе с двумя приемными каналами // Труды конференции «Вторая Всероссийская научно-техническая конференция молодых конструкторов и инженеров «МИНЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ», посвященная 120-летию со дня рождения академика А.Л. Минца и 60-летию аспирантуры Радиотехнического института». М.: Издательство МГТУ им. Баумана. – 2015. – С. 85 – 91.
2. *А.В. Аверин, А.Б. Шмелев.* К расчету характеристик обнаружения событий в системе с двумя приемными каналами // Сборник трудов конференции «РТИ Системы ВКО − 2015». – 2015. – С. 184 – 191.
3. *Черняк В.С.* Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.