

Реконструкция равновесия плазмы и система магнитного управления плазмой в токамаке

Ю.В. Митришкин^{1,3}, Т.К. Джумакаев^{2,3}, П.С. Коренев^{1,3}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Московский физико-технический институт (государственный университет)

³Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

1. Введение

Целью работы является разработка, исследование и численное моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М (ФТИ им. А.Ф. Иоффе, г. Санкт-Петербург) в компьютерных средах MATLAB/Simulink и LabVIEW. Токамак – это тороидальная вакуумная камера для удержания плазмы в магнитном поле, создаваемым токами во внешних катушках полоидального поля и собственным полем тока плазмы.

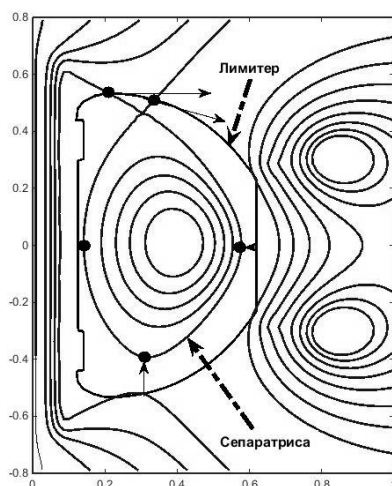


Рис.1. Магнитная конфигурация плазмы.

Разрабатывается алгоритм реконструкции равновесного распределения параметров плазмы в системе компьютерной математики LabVIEW, который предположительно должен применяться в контуре обратной связи системы для управления формой плазмы в реальном времени.

Для линейной модели плазмы в магнитном поле токамака Глобус-М [1]

требуется разработать и исследовать систему управления плазмой по току и форме. Под формой плазмы понимается форма ее сепаратрисы (границы плазмы), которая задаётся тремя расстояниями от сепаратрисы до стенки камеры токамака в трех заданных точках и положением точек пресечения сепаратрисы с вакуумной камерой (рис. 1). Сепаратриса – это наибольшая *замкнутая* линия уровня полоидального магнитного потока. Регуляторы по горизонтальному и вертикальному положению плазмы являются аналоговыми и работают в физическом эксперименте на токамаке Глобус-М [2].

Проводится сравнение программно-вычислительных комплексов MATLAB и LabVIEW по результатам моделирования в них многомерных систем управления плазмой.

2. Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы

Распределённые параметры плазмы должны быть восстановлены по сигналам магнитной диагностики, а именно, по полному току плазмы I_p и значениям полоидального потока Ψ_j в наборе точек $M_j = (r_j, z_j)$, $j = 1, \dots, N$ вне плазмы.

Полоидальный поток ψ должен удовлетворять уравнению равновесия в плазме Грэда-Шафранова [3, 4]

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\mu_0 r J_\varphi(\psi),$$

где J_φ – плотность тороидального тока. Решив это уравнение, можно получить распределение полоидального потока, создаваемое известным распределением тороидального тока. Используя условие баланса сил в плазме и уравнения Максвелла, можно получить выражение для плотности тока:

$$J_\varphi = r \frac{d}{d\psi} p(\psi) + \frac{1}{2\mu_0 r} \frac{d}{d\psi} F^2(\psi).$$

Здесь p и F являются, соответственно, давлением плазмы и полоидальным током, зависящими от ψ .

Для восстановления равновесия плазмы используется итерационный метод. На каждой итерации функции p и F представляются в виде полиномов от нормированного полоидального потока, полученного на предыдущей итерации:

$$x(r, z) = \frac{\psi(r, z) - \psi_S}{\psi_A - \psi_S},$$

$$\frac{d}{d\psi} p(r, z) = \sum_{k=1}^{N_p} \alpha_k x^k,$$

$$\frac{d}{d\psi} F^2(r, z) = \sum_{k=1}^{N_F} \beta_k x^k.$$

Здесь ψ_S и ψ_A – значения полоидального потока на сепаратрисе и магнитной оси на предыдущей итерации. Условия согласования распределений полоидального потока и тороидального тока плазмы с показаниями магнитной диагностики могут быть записаны в виде системы интегральных уравнений

$$\int_S G(M_j, M) \left(r \sum_{k=1}^{N_p} \alpha_k x^k + \frac{1}{2\mu_0 r} \sum_{k=1}^{N_F} \beta_k x^k \right) dS = \Psi_j + \psi_c,$$

$$\int_S \left(r \sum_{k=1}^{N_p} \alpha_k x^k + \frac{1}{2\mu_0 r} \sum_{k=1}^{N_F} \beta_k x^k \right) dS = I_p.$$

Интегрирование производится по площади поперечного сечения плазмы, $G(M_j, M)$ – это функция Грина для уравнения равновесия плазмы [4], ψ_c – полоидальный поток, создаваемый известными токами в катушках полоидального поля. Приведенная система интегральных уравнений линейна относительно искомых коэффициентов α_k и β_k и может быть записана в виде линейной системы алгебраических уравнений

$$AX = Y,$$

где вектор X состоит из искомых коэффициентов. Данная система уравнений, как правило, является переопределенной и вектор X находится минимизацией функционала $\|AX - Y\|^2$.

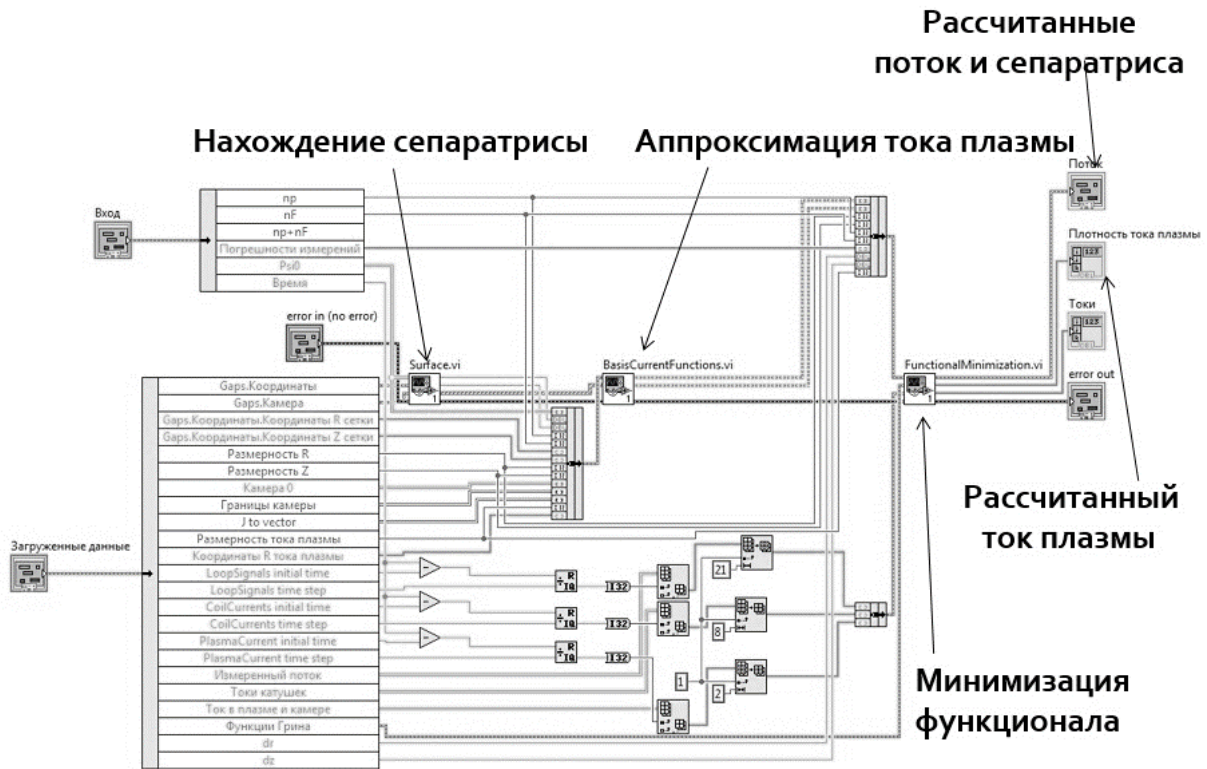


Рис. 2. Программа восстановления равновесия плазмы в среде LabVIEW.

Представленный алгоритм был реализован в среде LabVIEW в программе FCDI (Flux-Current Distribution Identification). Блок-схема программы приведена на рис. 2.

3. Линейные модели плазмы в токамаке

Для построения системы управления необходимо представить плазму в виде линейной модели в пространстве состояний. Динамика плазмы в токамаке описывается уравнениями Кирхгофа для магнитно взаимосвязанных контуров катушек токамака и витка плазменного тока [1]:

$$M\delta\dot{I} + M_p\delta\dot{I}_p + R\delta I + \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{r}_p}\delta\dot{\vec{r}}_p = \delta U, M_p^T\delta\dot{I} + M_{pp}\delta\dot{I}_p + \frac{\partial\Psi_{pc}}{\partial\vec{r}_p}\delta\dot{\vec{r}}_p = 0, \quad (1)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cv} \\ M_{vc} & M_{vv} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_c & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_c \\ 0_{N_v \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{r}_p} = \begin{bmatrix} \partial\Psi_{cp}/\partial r_p & \partial\Psi_{cp}/\partial z_p \\ \partial\Psi_{vp}/\partial r_p & \partial\Psi_{vp}/\partial z_p \end{bmatrix}, \vec{r}_p = \begin{bmatrix} r_p \\ z_p \end{bmatrix}, M_p = \begin{bmatrix} M_{pc} \\ M_{pv} \end{bmatrix}, \frac{\partial\Psi_{pc}}{\partial\vec{r}_p} = \begin{bmatrix} \partial\Psi_{pc}/\partial r_p \\ \partial\Psi_{pc}/\partial z_p \end{bmatrix}^T,$$

где M – блочная матрица индуктивностей, R – диагональные матрицы сопротивлений, Ψ – матрицы создаваемых контурами магнитных потоков, U – напряжения на катушках полоидального поля, индексы c, v, p обозначают катушки, вакуумную камеру токамака и плазму соответственно.

При выводе линейной модели массой плазмы пренебрегают. Равнодействующая сил, действующих на плазму, должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned} F_p \delta \vec{r}_p + F_I \delta I &= 0, \\ F_p &= \begin{bmatrix} \partial F_r / \partial r_p & \partial F_r / \partial z_p \\ \partial F_z / \partial r_p & \partial F_z / \partial z_p \end{bmatrix}, \\ F_I &= \begin{bmatrix} \partial F_r / \partial I_c & \partial F_r / \partial I_v \\ \partial F_z / \partial I_c & \partial F_z / \partial I_v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем линейную модель в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \delta \dot{I} &= A \delta I + B U, \\ \delta y &= C \delta I, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A = -\tilde{M}^{-1} R$, $B = \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_c \times N_c} & \mathbf{0}_{N_c \times N_v} \end{bmatrix}^T$. Выходные сигналы модели (3)

представляются в виде следующих выражений:

$$\begin{aligned} \delta I_p &= -M_{pp}^{-1} \left(M_p^T - \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I \right) \delta I, \\ \delta \vec{r}_p &= -F_r^{-1} F_I \delta I, \\ \delta g &= \frac{\partial g}{\partial I} \delta I. \end{aligned}$$

4. Система управления плазмой в токамаке Глобус-М

Синтез многомерного регулятора для системы управления формой плазмы в токамаке Глобус-М был осуществлён в MATLAB посредством решения задачи смешанной чувствительности [5]. Для этого регулятор отыскивался на множестве стабилизирующих регуляторов в обратной связи при минимизации H_∞ -нормы составной блочной матрицы

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(s) S(s) \\ W_2(s) K(s) S(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}^{K(s)} \rightarrow \min,$$

где $K(s)$ – матричная передаточная функция регулятора, $S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}$ –

выходная передаточная функция чувствительности, связывающая выходное возмущение d и выход объекта y в области изображений по Лапласу $y(s) = S(s)d(s)$, $G(s)$ – передаточная функция модели объекта, $-K(s)S(s)$ – передаточная функция от внешнего возмущения d ко входу объекта $u(s) = -K(s)S(s)d(s)$ при отрицательной обратной связи, $W_1(s), W_2(s)$ – весовые функции. В процессе синтеза регулятора весовые функции настраивались так, чтобы достигнуть приемлемого компромисса между качеством управления и запасом робастной устойчивости, который в данном случае определяется H_∞ -нормой матричной аддитивной неопределённости модели объекта Δ_A

$$\|\Delta_A(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\|K(s)S(s)\|_\infty},$$

$$\|\Delta_A(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}[\Delta_A(j\omega)], \quad \bar{\sigma}(\Delta_A) = \max_i \left(+\sqrt{\lambda_i(\Delta_A \Delta_A^H)} \right).$$

Система управления в MATLAB разделена на два блока: регулятор и модель (рис. 3). На вход системы управления формой плазмы скачком подавались задающие воздействия, которая система обрабатывает, примерно, за 30 мс (рис. 4). При этом в токе плазмы образуется переходный процесс, сходящийся к нулевому значению его отклонения от заданной величины за такой же интервал времени. Напряжения в центральном соленоиде и обмотках полоидального поля сходятся к постоянным значениям также за 30 мс. Система была промоделирована в MATLAB за 1,965 с реального времени.

Также была промоделирована система управления с добавленными блоками транспортного запаздывания (рис. 5), которые отображали работу АЦП и ЦАП. Запаздывание для АЦП задавалось равным 5 мкс, для ЦАП – 10 мкс. Введение блоков с данными величинами запаздывания не привели к изменению результатов работы системы. Также была найдена максимальная величина запаздывания, при которой результаты работы системы не меняются: 2 мс. При увеличении времени запаздывания по сравнению с этой величиной наблюдается возникновение колебательных процессов (рис. 6).

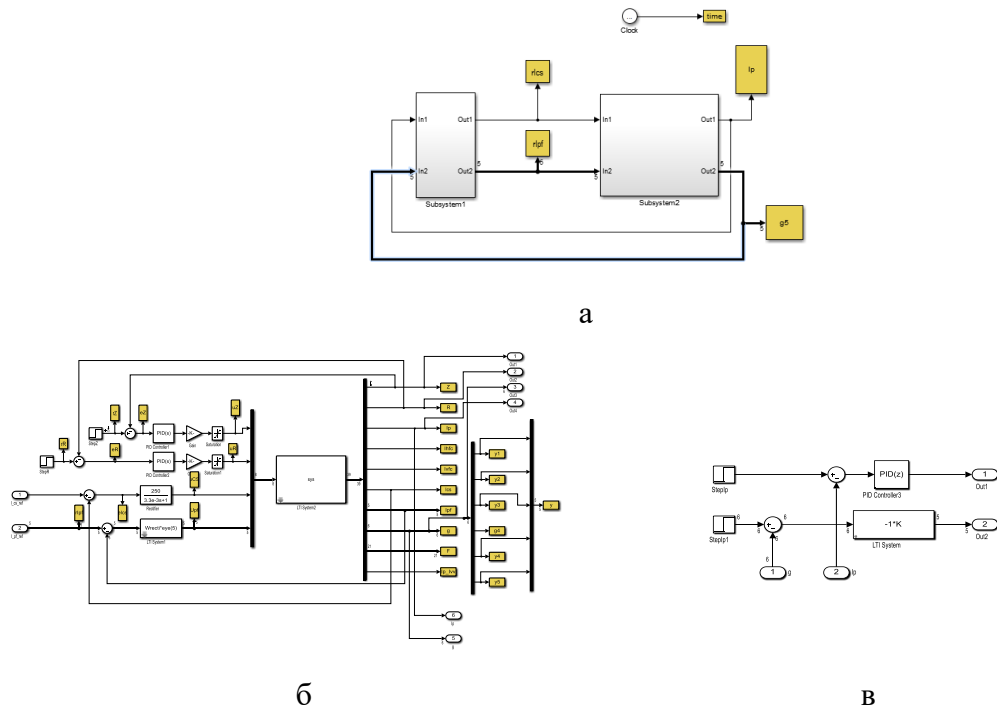


Рис. 3. Система управления в MATLAB (а), блок «Модель» (б) и блок «Регулятор» (в).

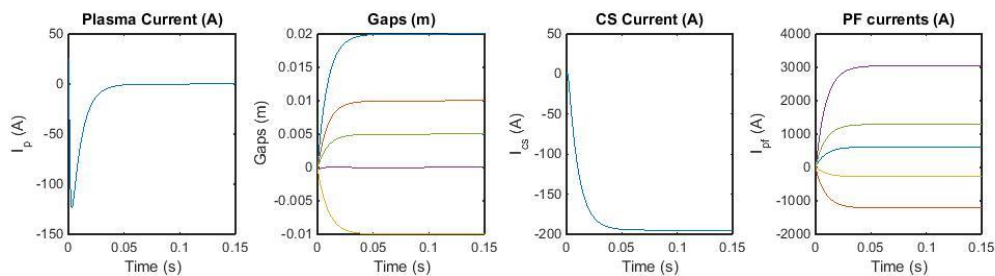


Рис. 4. Результаты моделирования системы управления плазмой в MATLAB.

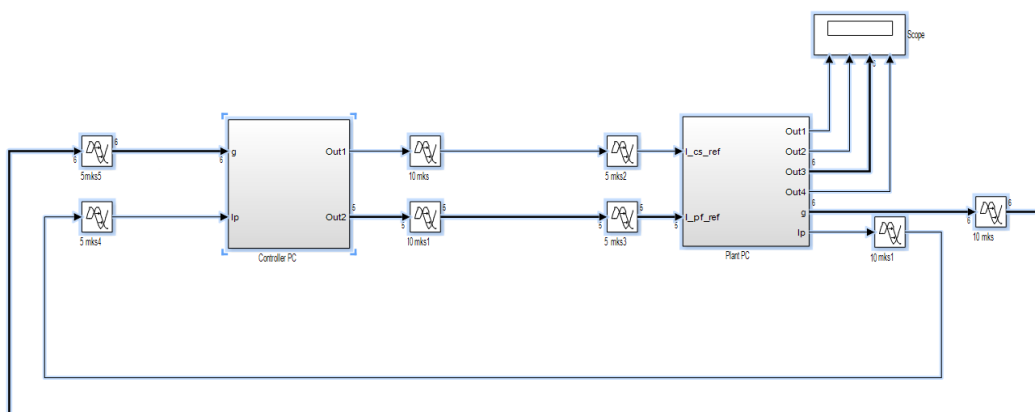


Рис. 5 Схема в MATLAB с транспортными запаздываниями.

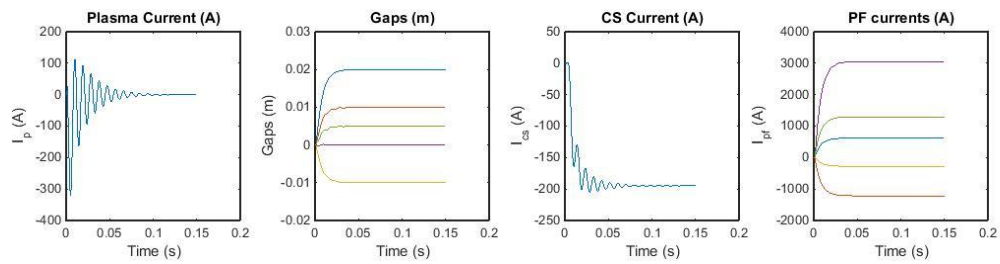


Рис. 6. Результаты для системы с общим транспортным запаздыванием 2 мс.

Система управления в среде LabVIEW аналогична системе в MATLAB (рис. 7). Здесь также присутствует разбиение на два блока – регулятор и модель. Результаты работы системы по току и форме плазмы в LabVIEW показаны на рис. 8. Схема в LabVIEW получается весьма громоздкой и запутанной (рис. 7) по сравнению с той же схемой в Simulink (рис. 3). Эта дополнительная сложность в LabVIEW возникает из-за того, что все схемы в LabVIEW набираются из блоков виртуальных приборов, имеющих фиксированную структуру. Это создаёт неудобство и непрозрачность при её исследовании и настройке. Система была промоделирована за 14,415 с реального времени, что на порядок медленнее аналогичного показателя в MATLAB.

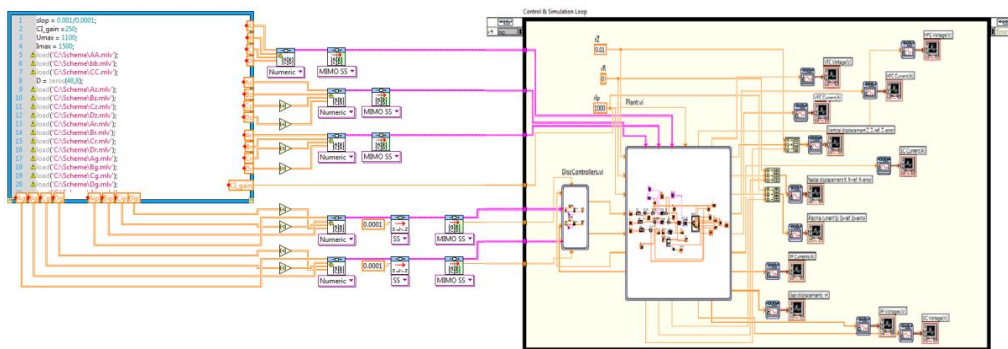


Рис. 7. Представление стенда в LabVIEW.

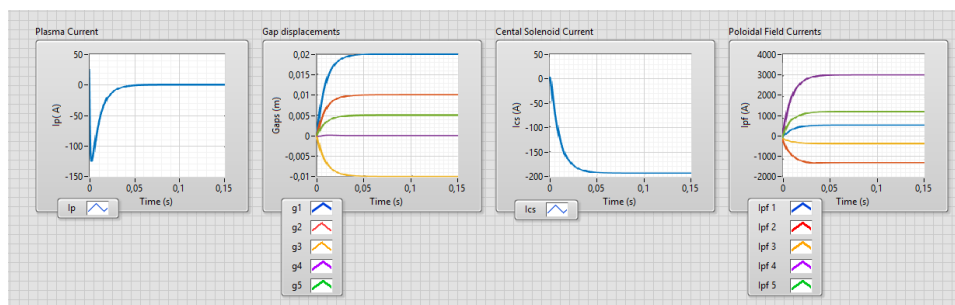


Рис. 8. Результаты работы системы в LabVIEW.

5. Сравнение систем управления в средах разработки LabVIEW и MATLAB

По результатам численного моделирования системы управления плазмой в двух средах компьютерной математики было выяснено, что MATLAB по сравнению с LabVIEW имеет ряд преимуществ:

- наличие значительно большего объема методов синтеза и анализа систем управления (80 toolboxes);
- на порядок более высокое время быстрогодействия при моделировании систем управления;
- заметно более компактное и удобное представление схем многомерных систем;
- возможность моделирования в скриптах и в Simulink и их взаимодействия, что повышает гибкость и универсальность среды разработки систем управления;
- возможность работы из командной строки;
- позволяет многократно сократить время решения типовых задач и значительно упрощает разработку новых эффективных алгоритмов управления и идентификации.

Выводы

Разработан алгоритм реконструкции равновесия плазмы в программно-вычислительном комплексе LabVIEW для токамака Глобус-М. Относительно полученного равновесия плазмы была построена линейная модель в пространстве состояний. Для этой модели синтезирована система управления с регуляторами по току и форме плазмы. Моделирование разработанной системы показало ее устойчивость и приемлемое качество управления.

Разработка и численное моделирование системы управления положением, током и формой плазмы в токамаке Глобус-М в средах MATLAB и LabVIEW показали ряд преимуществ MATLAB/Simulink.

Литература

1. *Mitrishkin Yu.V., Korenev P.S., Kartsev N.M., Patrov M.I.* Plasma shape control with a linear model for Globus-M tokamak // 41st EPS Conference on Plasma Physics, Berlin, Germany, 2014, P4. 054.
2. *Кузнецов Е.А., Митришкин Ю.В.* Автоколебательная система стабилизации

неустойчивого вертикального положения плазмы сферического токамака ГЛОБУС-М – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2005 – 71 с.

3. *Wesson J.* Tokamaks – Oxford: Clarendon Press, 1997 – 749 p.
4. *Ariola M., Pironti A.* Magnetic control of tokamak plasmas – Berlin: Springer-Verlag, 2008, 162 p.
5. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable feedback control. Analysis and design – Chichester: John Wiley & Sons, 2001 – 590 p.