

Контрпримеры к топологической гипотезе Тверберга

А.Б. Скопенков¹¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

Теорема Радона утверждает: любые $d+2$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Ее обобщает теорема Тверберга: любые $(d+1)(r-1)+1$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Теоремы Тверберга и Борсука-Улама обобщает следующая гипотеза.

Топологическая гипотеза Тверберга.

Для любых целых $r, d > 0$ и непрерывного отображения $(d+1)(r-1)$ -мерного симплекса в \mathbb{R}^d существуют r попарно непересекающиеся грани симплекса, образы которых имеют общую точку.

Эта гипотеза доказана в случае, когда r - степень простого. В докладе будет рассказано о контрпримерах для других r , полученных в 2015 году (Аввакумов, Вагнер, Мабийяр, Озайдын, Фрик и докладчик). Они основаны на следующих результатах.

Отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ комплекса K называется r -почти вложением, если f -образы любых r попарно непересекающихся симплексов не имеют общей точки.

Отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$ комплекса K размерности $k(r-1)$ называется $\{it\} r$ -почти \mathbb{Z} -вложением}, если f -образы любых r попарно непересекающихся симплексов пересекаются в нулевом числе точек с учетом знака (для некоторых ориентаций на этих симплексах).

Теорема.

Пусть r не степень простого. Тогда $k(r-1)$ -мерный остов $(kr+1)(r-1)$ -мерного симплекса r -почти \mathbb{Z} -вложим в \mathbb{R}^{kr} . (Озайдын)

Теорема.

1. Если $3(r-1)$ -мерный комплекс r -почти \mathbb{Z} -вложим в \mathbb{R}^{3r} , то он r -почти вложим в \mathbb{R}^{3r} . (Мабийяр-Вагнер, 2015)
2. Если $r \geq 3$ и $2(r-1)$ -мерный комплекс r -почти \mathbb{Z} -вложим в \mathbb{R}^{2r} , то он r -почти вложим в \mathbb{R}^{2r} . (Аввакумов-Мабийяр-Скопенков-Вагнер, 2015)

Доказательство этих теорем основано на обобщении метода устранения самопересечений (трюка Уитни) для точек кратности r и для коразмерности 2. Будет рассказано также о приложении этого обобщения к классификации орнаментов и каракулей.

Литература

1. *Mabillard I., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems // <http://arxiv.org/abs/1508.02349>. – 2015.
2. *Skopenkov A.* On the generalized Massey-Rolfsen invariant for link maps // *Fund. Math.* – 2000. – V. 165. – P. 1-15.