Обратимость дискретизации с экспоненциальным шагом

А. А. Григорьев

Известный критерий Найквиста обратимости дискретизации сигнала с равномерным шагом по времени опирается на преобразование Фурье, ассоциированное с группой сдвигов во времени. В работе рассматривается неравномерная дискретизация с экспоненциально изменяющимся шагом. Сформулированы критерии ее обратимости, базирующиеся на интегральном преобразовании Меллина, связанного с группой масштабирований шкалы времени.

1. Равномерная дискретизация

Дискретизация сигнала $x(t)$ непрерывного времени t с равномерным шагом T состоит в его замене потоком выборочных значений $x_n = x(t)|_{t=nT}$, $n \in \mathbb{Z}$. Дискретизация обратима, если сигнал $x(t)$ однозначно восстанавливается по потоку выборок.

Известный критерий Найквиста обратимости дискретизации формулируется в терминах свойств Фурье-спектра $x(f)$ сигнала $x(t)$ – набора коэффициентов $x(f)$ разложения сигнала $x(t)$ по базису из функций $e^{j2\pi ft}$, являющихся собственными функциями операторов D_τ сдвига во времени: $D_\tau x(t) = x(t-\tau)$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{j2\pi ft}\, df; \quad x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt.$$

Формулировка критерия обратимости использует всего два свойства преобразования Фурье [1] – теорему о свертке и закон преобразования гребенок δ-импульсов (гребенок Дирака).

Свертка функций $x(u)$, $y(u)$ – это функция

$$(x * y)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y(u-v)\, dv.$$

Операция свертки обладает всеми свойствами обычного умножения – она коммутативна и ассоциативна. Элементарно проверяется, что спектр сверки сигналов $x(t)$, $y(t)$ равен результату поточечного перемножения их спектров $x(f)$, $y(f)$:

$$(x * y)(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(f) y(f),$$

и наоборот, спектр поточечного произведения сигналов равен свертке их спектров:

$$x(t) y(t) \quad \Leftrightarrow \quad (x * y)(f).$$

Гребенка Дирака, известная также как функция выборок, – это поток δ-импульсов, равномерно распределенных по временной оси:

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n).$$

Уникальность гребенки состоит в инвариантности ее формы относительно преобразования Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nf} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m-f). \tag{1}$$

То, что спектром гребенки является сумма экспонент очевидно. С другой стороны, сумма экспонент – это ряд Фурье для гребенки δ-импульсов в частотной области.

Процесс дискретизации сигнала $x(t)$ естественно описать как результат его умножения на функцию выборок.

$$x_d(t) = x(t)\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(t-n).$$

Тогда спектр дискретизованного сигнала $x_d(t)$ – это свертка спектра $x(f)$ со спектром функции выборок. Но последний сам является гребенкой δ-импульсов. Свертка $x(f)$ со сдвинутым δ-импульсом дает сдвиг $x(f)$ по частоте:

$$(x(v) * \delta(v-m))(f) = x(f-m).$$

Свертка же с гребенкой δ-импульсов вызывает репликацию (периодизацию путем наложения сдвинутых копий) спектра $x(f)$. Так что дискретизации – переходу от $x(t)$ к $x_d(t)$ – в частотной области отвечает репликация спектра – переход от $x(f)$ к

$$x_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f-m).$$

Если спектр сигнала компактен в полосе Найквиста $f \in (-1/2, 1/2)$, то его сдвинутые по частоте копии не перекрываются. Тогда спектр исходного сигнала однозначно восстанавливается по реплицированному спектру $x_d(f)$, а следовательно и сам сигнал $x(t)$ восстанавливается по потоку выборочных значений. В этом и состоит критерий Найквиста обратимости равномерной дискретизации.

В нашем анализе шаг дискретизации T принят за единицу измерения времени. Единицей измерения частоты является тогда частота дискретизации $F = 1/T$. Так что в физических единицах условие обратимости равномерной дискретизации с шагом T состоит в требовании компактности спектра в полосе Найквиста $f \in (-F/2, F/2)$.

2. Преобразование Меллина

В пространстве правосторонних сигналов $x(u)$, $u > 0$ действует группа масштабирований, изоморфная группе положительных вещественных чисел a по умножению. Оператор масштабирования $S_\alpha(a)$ действует по правилу $S_\alpha(a)x(u) = a^{-\alpha}x(au)$, вызывая изменение шкалы времени с сохранением скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \int_0^\infty x(u)y^*(u)u^{-2\alpha}\,\frac{du}{u}.$$

При $\alpha = -1$ это масштабирование сохраняет площадь под кривой $x(u)$, при $\alpha = -1/2$ – энергию сигнала $x(u)$ (интеграл от квадрата модуля). Собственные функции оператора масштабирования имеют вид u^s, $s = \alpha + j2\pi\beta$. Преобразование Меллина [2] и дает разложение сигналов по этим собственным функциям

$$x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)u^s\,d\beta, \quad s = \alpha + j2\pi\beta,$$

$$x(s) = \int_0^\infty x(u)u^{-s}\frac{du}{u} = \int_{-\infty}^{\infty} x(e^t)e^{-st}\,dt. \tag{2}$$

Меллин-спектр $x(s)$ сигнала $x(u)$ совпадает с двухсторонним преобразованием Лапласа от $x(e^t)$. Соответственно, замена $u = e^t$ переводит формулу обращения преобразования Меллина в известную формулу Меллина обращения преобразования Лапласа.

Для преобразования Меллина также имеют место теоремы о свертке. Только они принимают несколько различные формы для временной и частотной областей. Элементарно проверяется, что перемножению меллин-спектров $x(s)$ и $y(s)$ отвечает мультипликативная свертка сигналов

$$(x \star y)(u) = \int_0^\infty x(v) y\Big(\frac{u}{v}\Big) \, \frac{dv}{v} \quad \Leftrightarrow \quad x(s)y(s). \tag{3}$$

Свертке же меллин-спектров вдоль вертикальной линии $\mathrm{Re}(s) = \alpha$

$$(x * y)_\alpha(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha + j2\pi\eta) y(\alpha + j2\pi\beta - j2\pi\eta) \, d\eta$$

во временной области отвечает инвариантное поточечное перемножение

$$(x \circ y)(u) = x(u) y(u) u^{-\alpha}, \tag{4}$$

выделенное свойством инвариантности по отношению к масштабированиям

$$S_\alpha(a)(x \circ y) = (S_\alpha(a)x \circ S_\alpha(a)y).$$

В конечном итоге это дает:

$$(x \circ y)(u) \quad \Leftrightarrow \quad (x * y)_\alpha(\beta). \tag{5}$$

Чтобы перейти к проблемам обратимости дискретизации найдем меллин-образ экспоненциальной гребенки

$$\chi_\gamma(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(\alpha+1)n} \delta(u - \gamma^n).$$

Подставив это в (2), найдем:

$$\chi_\gamma(s) = \chi_\gamma(\alpha + j2\pi\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-j2\pi\beta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \ln\gamma \beta n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\ln\gamma\beta - m).$$

На последнем этапе здесь было использовано (1). Приходим к следующему центральному результату:

Теорема 1. Меллин-образ экспоненциальной гребенки $\chi_\gamma(u)$ – это равномерная гребенка на линии $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ с шагом $1/\ln\gamma$:

$$\chi_\gamma(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(\alpha+1)n} \delta(u - \gamma^n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\Big(\beta - \frac{m}{\ln\gamma}\Big) = \chi_\gamma(\beta). \tag{6}$$

3. Условия обратимости

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы сформулировать условия обратимости дискретизации.

Дискретизуем сигнал $x(u)$ инвариантным умножением (4) на экспоненциальную гребенку $\chi_\gamma(u)$. Это даст

$$x_d(u) = (x \circ \chi_\gamma) = u^{-\alpha} x(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(\alpha+1)n} \delta(u - \gamma^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n x(\gamma^n) \delta(u - \gamma^n).$$

Согласно (5), в частотной области этому будет отвечать свертка меллин-спектра $x(s)$ с равномерной гребенкой $\chi_\gamma(\beta)$, которая вызовет его репликацию:

$$x_d(s) = \frac{1}{\ln\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\Big(\alpha + j2\pi\Big(\beta - \frac{m}{\ln\gamma}\Big)\Big).$$

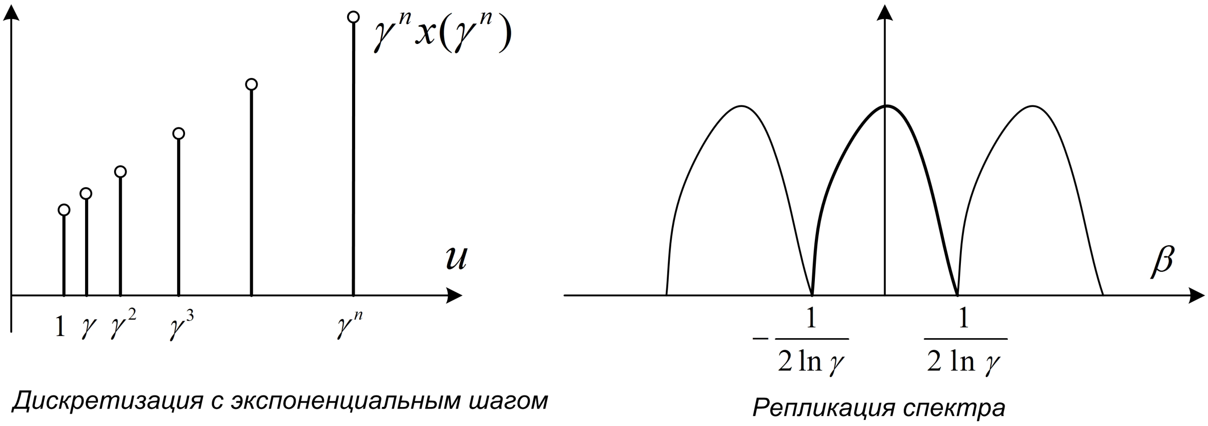

Рис. 1. *Неравномерная дискретизация по времени*

Получаем следующий результат:

Обратимость дискретизации по времени, рис. 1. Если меллин-спектр сигнала $x(u)$ компактен в полосе $|\beta| \leq \frac{1}{2\ln\gamma}$ при каком-нибудь значении α, то этот сигнал однозначно восстанавливается по потоку выборок $x_n = \gamma^n x(\gamma^n)$, взятых с экспоненциальным шагом по оси времени.

Зафиксируем теперь некоторое α и дискретизуем меллин-спектр $x(s) = x(\alpha + j2\pi\beta)$ умножением на равномерную гребенку $\chi_\gamma(\beta)$. Это даст

$$x_d(s) = \frac{1}{\ln\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\Big(\alpha + j2\pi\frac{m}{\ln\gamma}\Big)\delta\Big(\beta - \frac{m}{\ln\gamma}\Big)$$

Во временной области этому будет отвечать мультипликативная свертка (3) с экспоненциальной гребенкой

$$x_d(u) = (x\star\chi_\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(\alpha+1)n} \int_0^\infty \delta(v-\gamma^n) x\Big(\frac{u}{v}\Big)\frac{dv}{v} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{\alpha n} x\Big(\frac{u}{\gamma^n}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-\alpha n} x(a^n u);$$

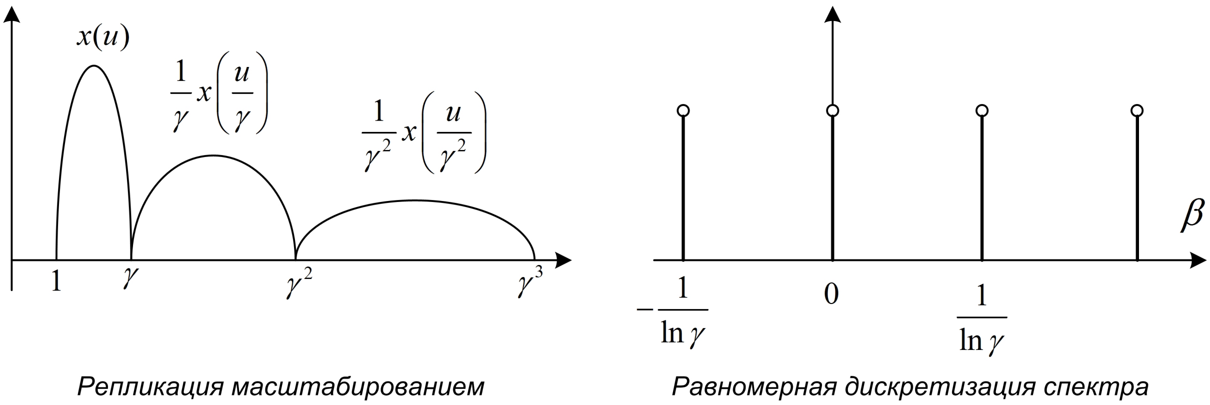

Рис. 2. *Дискретизация по частоте*

Таким образом, дискретизации меллин-спектра с шагом $1/\ln\gamma$ вдоль оси β при фиксированном $\alpha = \mathrm{Re}(s)$ во временной области отвечает репликация сигнала $x(u)$ наложением копий, получающихся повторным применением оператора масштабирования $S_\alpha(a)x(u) =$

$a^{-\alpha}x(au)$, $a = 1/\gamma$, см. рис. 2, на котором показан случай $\alpha = -1$. Такая репликация сохраняет возможность восстановления исходного сигнала, если области компактности масштабированных сигналов не перекрываются. Это наблюдение дает следующий критерий обратимости:

Обратимость дискретизации по частоте. Пусть сигнал компактен на интервале $(1, \gamma)$, $\gamma > 1$. Тогда его можно однозначно восстановить по выборочным значениям меллин-спектра, взятым равномерно с шагом $1/\ln\gamma$ вдоль произвольной линии $\mathrm{Re}(s) = \alpha$.

4. Заключение

Представленные здесь результаты показывают, что почти исключительно используемая в цифровой обработке равномерная дискретизация сигналов отнюдь не является единственно возможной. Подобные критерию Найквиста условия обратимости могут быть сформулированы и для других вариантов выбора множества точек дискретизации. Равномерная дискретизация выделена лишь простотой реализации и тем, что лежащие в ее основе спектральные представления хорошо известны в инженерной среде. Однако с ней связаны и определенные трудности. Известно, к примеру, что равномерная дискретизация экспоненциальных импульсных реакций аналоговых фильтров приводит к серьезной деградации свойств их цифровых аналогов. Более того, ясно, что эта деградация обусловлена именно равномерностью дискретизации – тем, что хвост импульсной реакции дискретизуется столь же детально, что и ее информативный начальный участок. В этой связи подобные рассмотренному здесь методы неравномерной дискретизации могут представлять интерес.

Литература

1. *Григорьев А. А.* Лекции по теории сигналов. — М.: МФТИ, 2014. глава 4.
2. *Titchmarsh, E. C.* Introduction to the Theory of Fourier Integrals // Clarendon Press, Oxford — 1975.