

**КОРРЕКЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА
ВЫСОКОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОКРЕСТНОСТИ МАЛОЙ
ПОЛУОСИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХ ВКЛЮЧЕНИЙ
ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

А.П. Протопопов

Введение

Для современных космических аппаратов (КА) для проведения маневров на орбите широко используются электрореактивные двигатели (ЭРД), вследствие своего высокого удельного импульса. Для автоматических КА коррекции орбиты проводятся как в плоскости орбиты с целью изменения эксцентриситета или периода орбиты, так и перпендикулярно плоскости орбиты с целью изменения наклона. В первом случае коррекции орбиты проводятся в апогее и перигее, во втором — две симметричные коррекции в окрестностях точек пересечения орбиты с малой полуосью на нисходящей и восходящей частях орбиты.

Управление движением вокруг центра масс осуществляется системой инерционных исполнительных органов (ИИО), в составе которой четыре маховика, которые суммарно в первом приближении дают сферу с кинетическим моментом 30 Н.м.с.

Для управления движением центра масс рассматриваемого КА на высокоэллиптической орбите (ВЭО) применяются восемь ЭРД, каждый из которых также создает момент относительно центра масс. Из-за ограничений энергопотребления в каждый момент времени возможна работа только одного ЭРД.

К рассматриваемому КА предъявляются жесткие требования по изменению периоду и длительности коррекции, которая не должна отличаться от расчетной более чем на несколько минут. Основной сложностью алгоритма коррекции является выдача корректирующего импульса с учетом возможности включения только одного ЭРД, удержание кинетического момента в заданных пределах в процессе коррекции и минимизации изменения периода орбиты по окончании коррекции. Для коррекции орбиты в окрестности малой полуоси задача решена с помощью включения четырех ЭРД [1]. Целью данной статьи является получение аналитических формул для расчета изменения кинетического момента КА на ВЭО с учетом работы двигателей, а также сравнение алгоритмов коррекции орбиты в окрестности малой полуоси с четырьмя и с тремя включениями ЭРД.

Ориентация КА и расположение ЭРД

Введем связанную систему координат (ССК) $OXYZ$, начало которой совпадает с центром масс КА, а оси OX , OY , OZ – совпадают с главными центральными осями инерции КА (рис. 1). Ось OY направлена по бинормали. На сеансе коррекции сохраняется постоянный угол между осью OX и направлением от КА на Землю, который рассчитывается так, чтобы Солнце находилось в плоскости OXY в середине участка коррекции и угол между направлением на Солнце составлял с полуосью $+OX$ не менее 90° , ось OZ дополняет до правой тройки.

Схема расположения ЭРД на КА представлена на рис. 1, рис. 2. Тяга каждого ЭРД равна $0,085$ Н. Векторы тяг двигателей параллельны плоскости OYZ КА, и составляют углы 45° с осями OZ и OY .

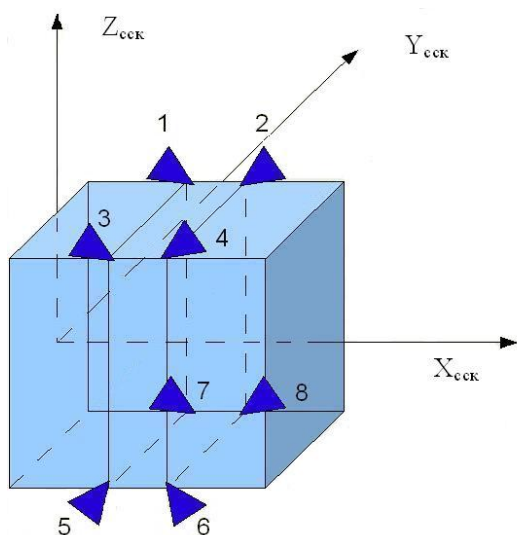


рис. 1. Схема расположения ЭРД на КА

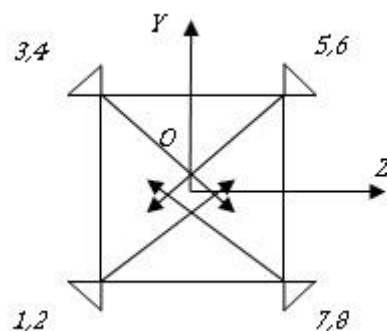


рис. 2 ЭРД в плоскости OXY

Силы и моменты, создаваемые каждым из восьми двигателей, при отсутствии перекосов векторов тяг относительно номинальных значений, соответствуют приведенным в таблице 1:

Таблица 1– Параметры положения ЭРД

Номер двигателя	Тяга двигателей		Управляющие моменты		
	F _y	F _z	M _x	M _y	M _z
TM1	P	P	M ₁	-M ₂	M ₂
TM2	P	P	M ₁	M ₂	-M ₂
TM3	-P	P	-M ₁	-M ₂	-M ₂
TM4	-P	P	-M ₁	M ₂	M ₂
TM5	-P	-P	M ₁	M ₂	-M ₂
TM6	-P	-P	M ₁	-M ₂	M ₂
TM7	P	-P	-M ₁	M ₂	M ₂
TM8	P	-P	-M ₁	-M ₂	-M ₂

где $P = 0,0586\text{Н}$, $M_1 = 0,012378\text{Нм}$, $M_2 = 0,0058664\text{Нм}$

Необходимо выдать требуемый корректирующий импульс вдоль оси OY.

Время, необходимое на коррекцию, находим по формуле:

$$t_{cor} = \frac{mp_{cor}}{P} \quad (1)$$

где t_{cor} - общее время работы двигателей; m - масса КА; p_{cor} - корректирующий импульс; P - тяга одного из ЭРД вдоль бинормали.

Изменение кинетического момента

Для кинетического момента применимы общеизвестные формулы [2]:

$$\bar{K} = \bar{H} + J\bar{\omega}$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M} \Rightarrow \bar{\omega} \times (\bar{H} + J\bar{\omega}) + \dot{\bar{H}} + J\dot{\bar{\omega}} = \bar{M}$$

$$\dot{\bar{H}} = -\bar{\omega} \times (\bar{H} + J\bar{\omega}) - J\dot{\bar{\omega}} + \bar{M}$$

где \bar{K} - вектор суммарного кинетического момента корпуса КА и системы ИИО, \bar{H} - вектор кинетического момента системы ИИО, J - тензор инерции КА, $\bar{\omega}$ - вектор орбитальной угловой скорости, \bar{M} - момент от двигателей.

Все вычисления для кинетического момента производятся в ССК OXYZ

Так как тензор инерции рассматриваемого КА диагональный и, орбитальная угловая скорость направлена по бинормали к орбите (т.е. имеет одну компоненту по оси OY), то:

$$-\bar{\omega} \times J\bar{\omega} = 0$$

Без ограничения общности предположим, что требуемый корректирующий импульс необходимо выдать вдоль положительного направления оси OY. Раскрывая векторное произведение, получаем систему уравнений для кинетического момента:

$$\begin{cases} \frac{dH_x}{dt} = -\omega H_z + M_x \\ \frac{dH_y}{dt} = -J_y \frac{d\omega}{dt} + M_y \\ \frac{dH_z}{dt} = \omega H_x + M_z \end{cases} \quad (2)$$

Далее рассмотрим 1-е и 3-е уравнение системы (2) и проинтегрируем их по истинной аномалии:

$$\begin{cases} \frac{dH_x}{dv} \frac{dv}{dt} = -\omega H_z + M_x \\ \frac{dH_z}{dv} \frac{dv}{dt} = \omega H_x + M_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_z = -\frac{dH_x}{dv} + \frac{M_x}{\omega(v)} \\ \frac{d^2 H_x}{dv^2} + H_x = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{M_x}{\omega} \frac{d\omega}{dv} - M_z \right) \end{cases} \quad (3)$$

Выразим угловую скорость и дифференциал от угловой скорости по истинной аномалии через истинную аномалию:

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c \cdot (1 + e \cos v)^2}{p^2},$$

$$d\omega = -\frac{2ec}{p^2} \sin v \cdot (1 + e \cos v) dv,$$

где $c = \sqrt{\mu p}$, p - фокальный параметр, e - эксцентриситет орбиты v - истинная аномалия, r - радиус-вектор, μ - гравитационный параметр Земли

Подставляя полученные выражения угловой скорости в (3), имеем:

$$\frac{d^2 H_x}{dv^2} + H_x = \frac{p^2}{c(1 + e \cos v)^2} \left(\frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} M_x - M_z \right)$$

Решим данное уравнение методом вариации постоянной. Решение будем искать в виде:

$$H_x = A(v) \cos v + B(v) \sin v$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(v) \cos v + B'(v) \sin v = 0 \\ -A'(v) \sin v + B'(v) \cos v = \frac{p^2}{c(1 + e \cos v)^2} \left(\frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} M_x - M_z \right) \end{cases} \quad (4)$$

Выражая $B'(v)$ получаем:

$$B'(v) = \frac{p^2 \cos v}{c(1 + e \cos v)^2} \left(\frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} M_x - M_z \right)$$

$$B'(v) = 2 \left(\frac{\sin v}{(1 + e \cos v)^2} - \frac{\sin v}{(1 + e \cos v)^3} \right) M_x - \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1 + e \cos v} - \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \right) M_z$$

Для $A'(v)$ из системы (4) получаем:

$$A'(v) = -B'(v) \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{p^2}{c} \left(-\frac{2e \sin^2 v}{(1 + e \cos v)^3} M_x + \frac{\sin v}{(1 + e \cos v)^2} M_z \right)$$

После взятия соответствующих интегралов получаем:

$$\begin{cases} B(v) = \frac{p^2}{c} \left(\frac{1 + 2e \cos v}{e(1 + e \cos v)^2} M_x + \frac{1}{1 - e^2} \left(\frac{\sin v}{(1 + e \cos v)} - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg}(\Theta) \right) M_z \right) + C_1 \\ A(v) = \frac{p^2}{c} \left(\left(\frac{e \sin v (e + \cos v)}{(1 + e \cos v)^2 (1 - e^2)} - \frac{2e}{(1 - e^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}(\Theta) \right) M_x - \frac{1}{e(1 + e \cos v)} M_z \right) + C_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } \Theta = \frac{(1 - e) \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Найдем выражение для H_y из (2), переходя к дифференцированию по истинной аномалии:

$$\frac{dH_y}{dv} \frac{dv}{dt} = -J_y \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dt} + M_y$$

$$\frac{dH_y}{dv} \omega(v) = -J_y \left(-\frac{2ec}{p^2} \sin v \cdot (1 + e \cos v) \right) \omega(v) + M_y$$

$$\frac{dH_y}{dv} = J_y \frac{2ec}{p^2} \sin v \cdot (1 + e \cos v) + \frac{p^2}{c \cdot (1 + e \cos v)^2} M_y$$

Проинтегрировав полученное выражение, имеем:

$$H_y = -J_y \frac{2ec}{p^2} \left(\cos v + \frac{e \cos 2v}{4} \right) + \frac{p^2}{c(1-e^2)} M_y \left(\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \arctg(\Theta) - \frac{e \sin v}{(1+e \cos v)} \right) + C_3 \quad (6)$$

Проекция кинетического момента на оси ССК момента для произвольного положения КА на орбите (истинная аномалия) с учетом работы ЭРД имеют вид:

$$\begin{cases} H_x = A(v) \cos v + B(v) \sin v \\ H_y = -J_y \frac{2ec}{p^2} \left(\cos v + \frac{e \cos 2v}{4} \right) + \frac{p^2}{c(1-e^2)} M_y \left(\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \arctg(\Theta) - \frac{e \sin v}{(1+e \cos v)} \right) + C_3 \\ H_z = A(v) \sin v - B(v) \cos v + \frac{p^2}{c} \frac{M_x}{(1+e \cos v)^2} \end{cases} \quad (7)$$

Константы C_1, C_2, C_3 находим, подставляя в (7) выражения для $A(v), B(v)$ из (5) и начальные значения кинетического момента и истинной аномалии.

Изменение периода орбиты и расчет времени работы ЭРД

Запишем выражение для изменения периода орбиты [3]:

$$\Delta T = \frac{3T}{1-e^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [e \sin(v) \Delta \mathcal{G}_r + (1+e \cos(v)) \Delta \mathcal{G}_n],$$

где T - период орбиты, $\Delta \mathcal{G}_r, \Delta \mathcal{G}_n$ - радиальная и нормальная компоненты корректирующего импульса в орбитальной системе координат $Oxuz$, начало которой совпадает с началом координат ССК, оси Ox направлена по радиус-вектору, Oy совпадает с OY ССК, Oz – до правой тройки.

Угол эксцентрической аномалии E связан со временем t движения по орбите [1], [5]:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E - e \sin E]$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Delta E [1 - e \cos E], \quad (8)$$

где Δt - продолжительность работы ЭРД.

Учитывая связь истинной аномалии с эксцентрической аномалией [2]

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

и связь приращения импульса от ЭРД с ускорением ЭРД:

$$\mathcal{G}_r = a_r \Delta t, \quad \mathcal{G}_n = a_n \Delta t,$$

получим для:

$$\Delta T = 3T \frac{a^2}{\mu} \Delta E \left(a_r e \sin E + a_n \sqrt{1-e^2} \right) \quad (9)$$

Эксцентрическая аномалия на промежутке коррекции в окрестности малой полуоси за время предполагаемой коррекции 1 час меняется незначительно, поэтому можно считать, что в уравнении (9):

$$\sin E = \sin E_0 = \text{const}$$

Для выдачи положительного корректирующего импульса по бинормали (вдоль оси ОУ ССК) согласно таблице 1 необходимо включения 1,2, 7 или 8 двигателей. В плоскости орбиты двигатели 1 и 2 будут иметь положительные компоненты, а 7 и 8 – отрицательные, т.е. у них будут разные знаки в выражении (9). Если рассматривать включение трех двигателей, то для минимизации изменения периода должно выполняться условие для ЭРД:

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = 0 \quad (10)$$

В выражении (9) для 1-го и 2-го ЭРД радиальная и нормальная составляющие имеют один знак, а для 7-го и 8-го – противоположный. Тогда с учетом малого изменения орбитальных параметров за время коррекции и, рассматривая включение 1, 7 и 2 двигателей получаем из (10):

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = 0$$

Исходя из выражения (8), учитывая неизменность параметров орбиты, получаем:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_3,$$

т.е. длительность включения 2-го по счету двигателя должно равняться сумме двух других.

Если продолжительность коррекции орбиты в окрестности малой полуоси для рассматриваемого КА равно t_{cor} , то с учетом (1) продолжительность 2-го включения будет $\frac{t_{cor}}{2}$, а для 1-го и 3-го включения будет $\frac{t_{cor}}{4}$. Далее происходит итерационное изменение времени работы 1, 3, просчет изменения эксцентрической аномалии для

соответствующих промежутков с помощью итерационного решения уравнения Кеплера [5]:

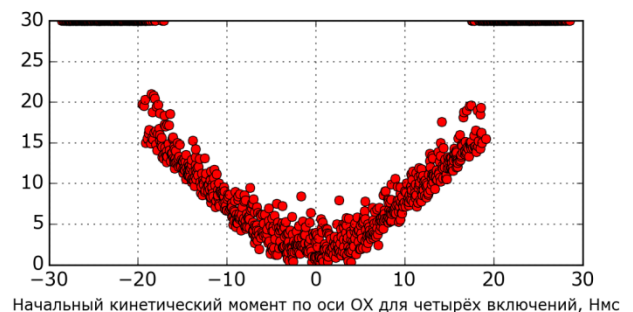
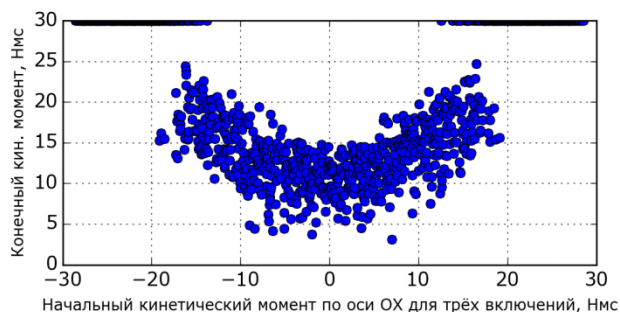
$$\bar{E} = e \sin(\bar{E}) + M ,$$

где $M = n(t - \tau)$ - средняя аномалия, n - средняя угловая скорость обращения вокруг центрального тела, τ - эпоха.

Получив изменение эксцентрической аномалии, вычисляем изменение периода для каждого промежутка по формуле (9)

Сравнение алгоритмов с четырьмя и тремя включениями ЭРД

Численное моделирование проводилось для рассматриваемого алгоритма с тремя включениями ЭРД и алгоритма с четырьмя включениями ЭРД [1]. Начальное значение кинетического момента относительно рассматриваемой оси задавалось от -29 до 29 Нмс, для оставшихся двух проекций начальное значение кинетического момента выбирались случайным образом из диапазона -10..10 Нмс. В процессе коррекции кинетический момент не превышал предельно допустимых значений 30Нмс.



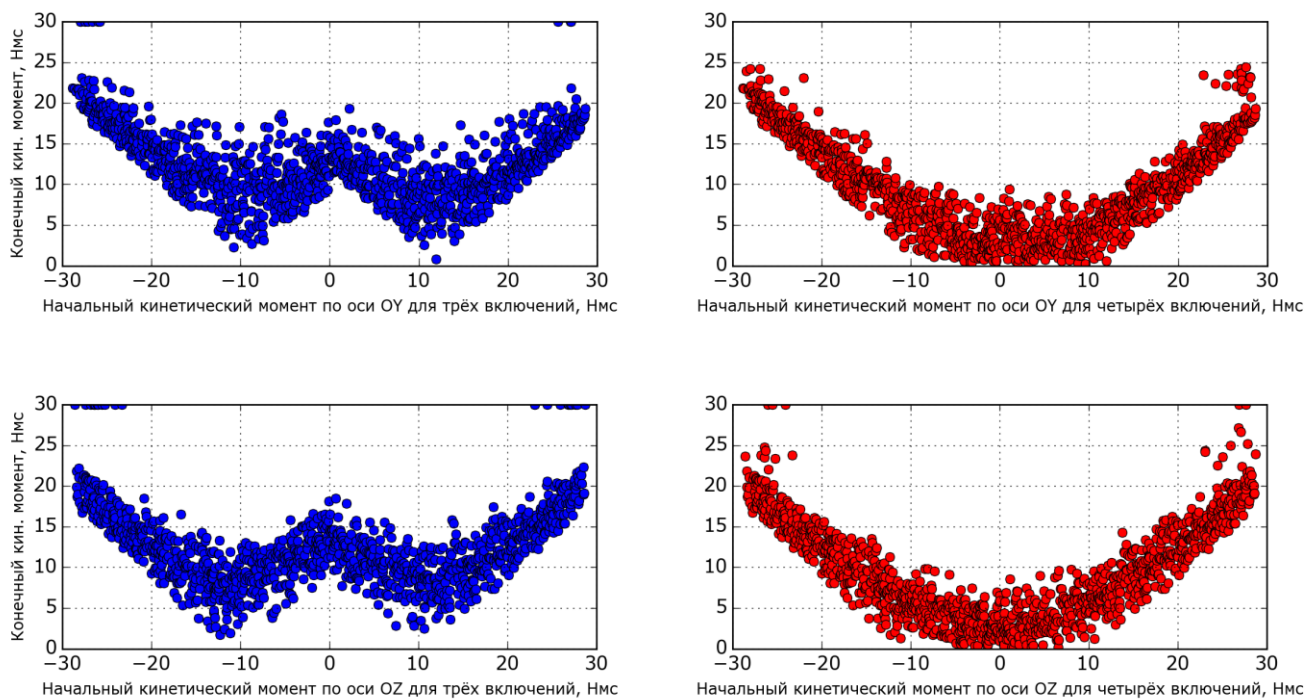


рис 3. Зависимость конечного кинетического момента от начального

Изменение периода для случая трех и четырех включений составило порядка 0.01с. При включении одного двигателя на весь промежуток коррекции изменение периода составляет около 0.4 секунд.

Точки на графике, где конечный кинетический период равен 30 Нмс показывают, где алгоритмы не работают. При больших начальных значениях компоненты кинетического момента вдоль оси ОХ затруднительно проводить коррекцию как тремя, так и четырьмя включениями ЭРД.

Из графиков получаем, что если начальный кинетический момент направлен преимущественно по оси ОУ или ОZ и имеет значение более 15 Нмс, то алгоритм с тремя включениями совпадает с алгоритмом включения четырех двигателей.

Заключение

В работе получены аналитические выражения для изменения кинетического момента за счет работы двигателей и алгоритм коррекции орбиты с помощью трех включений ЭРД. Сравнение алгоритмов с четырьмя и с тремя включениями с помощью численного моделирования показывает, что алгоритм с тремя включениями при ограниченных начальных условиях по кинетического моменту работоспособен. Коррекция с помощью трех включений позволит уменьшить количество включений ЭРД, что позволит продлить срок службы КА.

На выходе работы данного алгоритма получаем порядок включения двигателей, необходимый для проведения коррекции, промежутки работы каждого из них. При этом минимизируется изменение по периоду орбиты. Также, в процессе коррекции решается задача удержания кинетического момента ИИО в заданной области.

Библиографический список:

1. *Платонов В.Н.* Одновременное управление движением центра масс и вокруг центра масс, *Космическая техника и технологии*, №1, г. 2013
2. *Айзерман М.А.* Классическая механика. - М.: Наука, 1980. - 367 с.
3. *Протопопов А.П., Богачев А.В., Воробьева Е.А.* Коррекция орбиты космического аппарата на высокоэллиптической орбите двигателями малой тяги, электронный журнал "Труды МАИ", выпуск №68.
4. *Авдеев Ю.Ф., Беляков А.И., Брыков А.В.* Полет космических аппаратов. Примеры и задачи. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
5. *Раушенбах Б. В., Овчинников М.Ю.* Лекции по динамике космического полета. – М.: МФТИ, 1997. – 188 с.

Сведения об авторах:

Протопопов Антон Павлович, ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева", инженер-математик 3 категории