УДК 519.868

Поиск возможных оптимальных режимов процесса нефтедобычи с помощью математического моделирования

А.Ю. Флёрова[1,2]

[1]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрим процесс нефтедобычи на некотором месторождении нефти. Через $x(t)$ обозначим долю извлекаемых запасов, примем объем месторождения за единицу, $0 \leq x(t) \leq 1$, предположим, уровень начала добычи $x(0) = x_0$ и время разработки месторождения T нефиксированы и являются в задаче определяемыми параметрами. Введем функцию $b(t)$, описывающую технологический уровень процесса нефтедобычи, приращением которой в единицу времени мы можем управлять с помощью неотрицательного управления $u(t)$. Пусть c и c_0 - параметры, определяющие стоимость добычи нефти (издержки, связанные с введение новых технологических мощностей, и постоянные издержки, связанные с эксплуатацией месторождения, соответственно), r - коэффициент дисконтирования, а $b(0)$ - начальный технологический уровень (необходимые затраты перед началом добычи). В этой задаче управляющим параметром являются также параметр, характеризующий темп добычи нефти $v(t)$. Будем считать, что темп добычи нефти не превышает темпа, задаваемого кривой Хубберта [1]. Пусть производитель максимизирует свой доход $N(t)$ за время жизни месторождения. В данной модели цены на нефть считаем постоянными. Для того чтобы учесть возможные инфраструктурные ограничения на добычу, введем параметр M. Получаем следующую задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$N(T) - cb(0) \to max$$

$$\dot{N}(t) = (v(t) - cu(t) - c_0)e^{-rt},$$

$$\dot{x}(t) = v(t),$$

$$\dot{b}(t) = u(t),$$

$$v(t) \leq b(t)x(t)\big(1 - x(t)\big),$$

$$0 \leq v(t) \leq M, \qquad u(t) \geq 0, \qquad N(0) = 0.$$

Для такой задачи сформулирован и доказан принцип максимума Понтрягина [2], применение которого дает три возможных варианта поведения оптимальной траектории. Далее функции $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ - сопряженные переменные, для которых выполняются условия транверсальности $\varphi_2(0) = \varphi_2(T) = \varphi_3(T) = 0$ и $\varphi_3(0) = $ с.

1. "Режим Хубберта". В этом режиме график функции, характеризирующей изменение накопленной добычи, имеет колоколообразную форму, характерную для "традиционных" кривых Хубберта. В этом режиме возможно как начало так и конец процесса нефтедобычи. В случае хорошо развитой инфраструктуры, т.е. при достаточно большом значении параметра M, весь процесс нефтедобычи будет проходить по этому сценарию. При этом поведение оптимальных траекторий описывается следующими уравнениями.

$$\dot{x}(t) = v(t) = b(t)x(t)\big(1 - x(t)\big) \leq M,$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = r\varphi_2(t) - \big(1 + \varphi_2(t)\big)b(t)\big(1 - 2x(t)\big),$$

$$\dot{\varphi}_3(t) = r\varphi_3(t) - \big(1 + \varphi_2(t)\big)x(t)\big(1 - x(t)\big),$$

$$b(t) = const.$$

2. "Режим полочки". В этом режиме инфраструктура полностью загружена и добыча происходит на уровне M. В таком режиме невозможно начинать и заканчивать процесс нефтедобычи, и будут справедливы следующие уравнения.

$$\dot{x}(t) = v(t) = M < b(t)x(t)\big(1 - x(t)\big),$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = r\varphi_2(t), \quad \dot{\varphi}_3(t) = r\varphi_3(t), \quad b(t) = const.$$

3. Режим "особенный". В этом режиме начальные капиталовложения $b(0)$ выбираются таким образом, что $b(0)x(0)\big(1 - x(0)\big) = M$, а $u(t) = -\frac{M^2(1-2x(t))}{\left(1-x(t)\right)^2}$. При этом $x(t) \geq 1/2$. Выход из этого режима осуществляется через первый режим.

$$\dot{x}(t) = v(t) = b(t)x(t)\big(1 - x(t)\big) = M,$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = r\varphi_2(t) - \frac{\mathrm{c}}{x(t)(1 - x(t))}b(t)\big(1 - 2x(t)\big),$$

$$\varphi_3(t) \equiv \mathrm{c}.$$

Выбор оптимального режима и переходы между режимами определяются в зависимости от параметров модели. Системы дифференциальных уравнений просчитываются численно в обратном времени.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (14-07-00075).

Литература

1. *Петров В.В., Поляков Г.А., Полякова Т.В., Сергеев В.М.* Долгосрочные перспективы российской нефти (анализы, тренды, сценарии). – М.: ФАЗИС, 2003. – 200 с.

2. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. – М., Издательство Центра прикладный исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004. – 284 с.