

Поляризационные эффекты в задаче прохождения плоской волны через периодическую неоднородную среду.

В.В. Черник
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Уравнения Максвелла в случае E-поляризации.

Уравнения Максвелла ($\varepsilon' = \varepsilon'(x, y)$):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon' \vec{E} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \mu \vec{H} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon' \vec{E}) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (4)$$

Следствием уравнений Максвелла является

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\vec{k} * \vec{E}] \quad (5)$$

Положим $\mu = 1$, $\vec{H} = \overrightarrow{(0, 0, H_z)}$, $\vec{E} = \overrightarrow{(E_x, E_y, 0)}$. Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{i\omega\varepsilon'}{c} E_x \quad (1')$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{i\omega\varepsilon'}{c} E_y \quad (1')$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i\omega}{c} H_x \quad (2')$$

Уравнение (1') является следствием уравнения (1). Из уравнения (4) следует так же, что все компоненты функции зависят только от x и y . После некоторых преобразований и подстановок получим уравнение на H_z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + k^2 H_z = 0$$

Предположим, что функция $\varepsilon'(x, y)$, описывающая изменение показателя преломления среды периодична по y с периодом a . По x принимаем условие $\varepsilon'(x, y) = 1$ при $x \leq 0$, или $x \geq x_{max}$.

Краевые условия предполагается получать из условий излучения.

Обозначения и краткие выкладки.

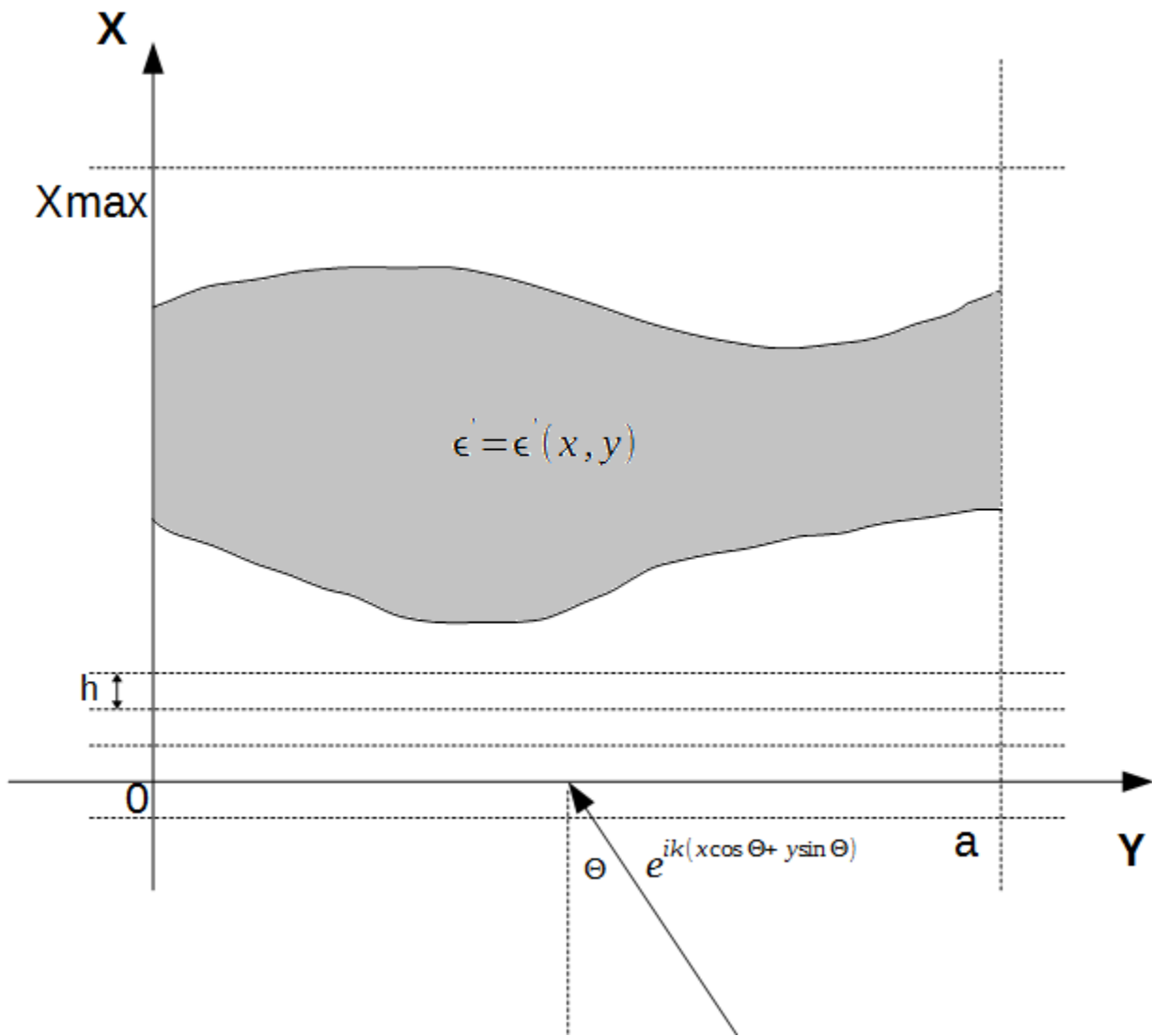
$$H_z(x, y) = u(x, y) = \sum_j B_j(x) \Psi_j(y)$$

$$\Psi_j(y) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \frac{t+2\pi j}{a} y}, \quad t = ka \sin \Theta, \quad \Delta \Psi_j + \lambda_j \Psi_j = 0, \quad \lambda_j = \left(\frac{t+2\pi j}{a} \right)^2$$

Краевые условия.

$$x \leq 0: B_j = \delta_{j0} e^{ikx \cos \Theta} + R_j e^{-i\gamma_j x}, \quad \gamma_j = \sqrt{k^2 - \lambda_j}$$

$$x \geq x_{\max}: B_j = T_j e^{i\gamma_j x}, \quad \gamma_j = \sqrt{k^2 - \lambda_j}$$



Количество элементов ряда

$$\frac{-ak(1 + \sin \Theta)}{2\pi} \leq j \leq \frac{ak(1 - \sin \Theta)}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{-a(1 + \sin \Theta)}{\lambda} \leq j \leq \frac{a(1 - \sin \Theta)}{\lambda}$$

, где λ – длина волны

То есть $-N_1 \leq j \leq N_2$, где $N_1 = \left[\frac{a(1+\sin\Theta)}{\lambda} \right]$, $N_2 = \left[\frac{a(1-\sin\Theta)}{\lambda} \right]$.

Интегральные преобразования и переход к системе ОДУ

$$\int_0^a \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k^2 u \right) \Psi_j^* dy = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_s \frac{dB_s}{dx} \int_0^a \frac{\Psi_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy \right) + k^2 B_j - \sum_s B_s \int_0^a \frac{\dot{\Psi}_s \dot{\Psi}_j^*}{\varepsilon'} dy = 0,$$

Перепишем полученную систему в матричном виде:

$$(Kb')' - (\tilde{K} - k^2 E)b = 0, \quad (6)$$

где $b = (B_{N_2}, \dots, B_{-N_1})^T$, $K = \{k_{sj}\}$, $k_{sj} = \int_0^a \frac{\Psi_s \Psi_j^*}{\varepsilon'} dy$, $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{sj}\}$, $\tilde{k}_{sj} = \int_0^a \frac{\dot{\Psi}_s \dot{\Psi}_j^*}{\varepsilon'} dy$, E – единичная матрица порядка $N_1 + N_2 + 1$, $\dot{\Psi}_s = \frac{d\Psi_s}{dy} = i\sqrt{\lambda_s} \Psi_s$, $\dot{\Psi}_j^* = \frac{d\Psi_j^*}{dy} = -i\sqrt{\lambda_j} \Psi_j^*$, соответственно, $\tilde{k}_{sj} = \sqrt{\lambda_s \lambda_j} k_{sj}$, то есть матрицы K и \tilde{K} связаны почленным умножением на симметричную матрицу $\{\sqrt{\lambda_s \lambda_j}\}$. Все матрицы имеют порядок $N_1 + N_2 + 1$.

Сделаем замену $p = Kb'$, тогда систему второго порядка (6) можно переписать в виде системы первого порядка

$$\begin{cases} b' = K^{-1}p \\ p' = (\tilde{K} - k^2 E)b \end{cases}$$

Краевые условия.

$$x = 0: b'_j + i\gamma_j b_j = 2i\gamma_0 \delta_{j0} e^{i\gamma_0 x} = 2i\gamma_0 \delta_{j0},$$

$$x = x_{max}: b'_j - i\gamma_j b_j = 0,$$

или с учётом замены и матричных обозначений

$$\begin{cases} p' = Ab \\ b' = Bp \end{cases} \quad (8)$$

$$x = 0: p + i\Gamma K b = Kc,$$

$$x = x_{max}: p - i\Gamma K b = 0$$

Матричные обозначения.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{N_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{N_2-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{-N_1} \end{pmatrix}, b = (B_{N_2}, B_{N_2-1}, \dots, B_{-N_1})^T,$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{N_2, N_2} & k_{N_2, N_2-1} & \dots & k_{N_2, -N_1} \\ k_{N_2-1, N_2} & k_{N_2-1, N_2-1} & \dots & k_{N_2-1, -N_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{-N_1, N_2} & k_{-N_1, N_2-1} & \dots & k_{-N_1, -N_1} \end{pmatrix}, \tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_{N_2, N_2} & \tilde{k}_{N_2, N_2-1} & \dots & \tilde{k}_{N_2, -N_1} \\ \tilde{k}_{N_2-1, N_2} & \tilde{k}_{N_2-1, N_2-1} & \dots & \tilde{k}_{N_2-1, -N_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{k}_{-N_1, N_2} & \tilde{k}_{-N_1, N_2-1} & \dots & \tilde{k}_{-N_1, -N_1} \end{pmatrix}$$

$$c = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_2}, 2i\gamma_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_1} \right)^T$$

$$A = (\tilde{K} - k^2 E), B = K^{-1}$$

Вспомогательные задачи Коши.

Положим $\delta_j = (\delta_{N_2, j}, \delta_{N_2-1, j}, \dots, \delta_{-N_1, j})^T, j = -N_1, \dots, N_2.$

$$\begin{cases} p^{2, j'} = Ab^{2, j} \\ b^{2, j'} = Bp^{2, j} \end{cases} \quad (9, j)$$

$$x = 0: \quad b^{2, j} = \delta_j, p^{2, j} = 0$$

$$\begin{cases} p^{3, j'} = Ab^{3, j} \\ b^{3, j'} = Bp^{3, j} \end{cases} \quad (10, j)$$

$$x = 0: \quad b^{3, j} = 0, p^{3, j} = \delta_j$$

Разностная схема третьего порядка точности для решения задач типа (9, j) и (10, j)

Задача:

$$\begin{cases} p' = Ab \\ b' = Bp \end{cases}$$

$$x = 0: \quad b = b_0, \quad p = p_0$$

Схема численного решения:

$h = \frac{x_{max}}{N}, b_n = b(nh), A_n = A(nh), B_n = B(nh), K_n = K(nh), n = 0, 1, \dots, N,$ где N – количество шагов разбиения отрезка $[0, x_{max}]$.

$$p_{i+1} = p_i + \frac{A_i + A_{i+1}}{2} b_i h + \frac{1}{2} A_i B_i p_i h^2, b_{i+1} = b_i + \frac{1}{2} (B_{i+1} p_{i+1} + B_i p_i) h.$$

Метод стрельбы.

Ищем решение исходной задачи (8) в виде линейной комбинации решений задач (2,j) и (3,s):

$$b = \sum_{j=-N_1}^{N_2} \alpha_j b^{2,j} + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \beta_s b^{3,s}$$
$$p = \sum_{j=-N_1}^{N_2} \alpha_j p^{2,j} + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \beta_s p^{3,s}$$

Введём дополнительные матричные обозначения: $\alpha = (\alpha_{N_2}, \alpha_{N_2-1}, \dots, \alpha_{-N_1})^T$, $\beta = (\beta_{N_2}, \beta_{N_2-1}, \dots, \beta_{-N_1})^T$. Тогда первое граничное условие задачи (8)

$$p_0 + iK_0 \Gamma b_0 = K_0 c$$

даст выражение

$$\beta = K_0 (c - i\Gamma \alpha).$$

Систему уравнений на коэффициенты α запишем, исходя из краевого условия $x = x_{max}$: $p_N - iK_N \Gamma b_N = 0$ задачи (8). Для этого понадобятся дополнительные матричные обозначения:

$$p_N^l = (p_N^{l,N_2}, p_N^{l,N_2-1}, \dots, p_N^{l,-N_1}), b_N^l = (b_N^{l,N_2}, b_N^{l,N_2-1}, \dots, b_N^{l,-N_1}),$$

То есть, p_N^j, b_N^j – матрицы, составленные из решений вспомогательных задач Коши (9, j) и (10, j) в точке $x = x_{max}$ как из столбцов ($l \in \{2, 3\}$).

Тогда система уравнений на коэффициенты α запишется в виде

$$(p_N^2 - (ip_N^3 K_0 + iK_N b_N^2 + K_N \Gamma b_N^3 K_0) \Gamma) \alpha = (iK_N \Gamma b_N^3 - p_N^3) K_0 c$$

Принимая во внимание, что $\varepsilon'(0, y) = \varepsilon'(x_{max}, y) = 1$, можно считать, что $K_0 = K_N = E$, и

$$(p_N^2 - i\Gamma b_N^2 - (ip_N^3 + \Gamma b_N^3) \Gamma) \alpha = (i\Gamma b_N^3 - p_N^3) c$$
$$\beta = c - i\Gamma \alpha$$

Результаты расчётов.

Было проведено несколько стандартных тестов и две серии расчётов. В обеих сериях $\varepsilon = 41 + 115i$, в первой серии граница раздела сред представляет собой синусоиду с периодом, равным удвоенной длине волны, и амплитудой $0,8\lambda$, во второй ровная поверхность.

Некоторые тестовые результаты:

Wave length: 1
Wave angle: 0
Screen period: 20
Screen thickness: 1.5
Points X: 100
Points Z: 100

```

def targetFunc(x):
    holes = [0.2, 0.5, 0.8, 0.5]
    phases = [False, True, False, True]
    max_hole_size = 5

def screenFunc(x, z):
    layer1 = 1.0 + 1j
    holes = [0.2, 0.5, 0.8, 0.5]
    phases = [False, True, False, True]
    max_hole_size = 5
    hi = int(math.floor(x / max_hole_size))
    if z <= 0.5:
        if hi > len(holes): return layer1
        hsize = holes[hi]
        if abs(x / max_hole_size - hi - 0.5) <
    
```

Passed: 51.416088%
Reflected: 1.947200%
Absorption: 46.636712%

Wave length: 1
Wave angle: 0
Screen period: 2
Screen thickness: 0.25
Points X: 50
Points Z: 50

```

def targetFunc(x):
    return 1 - int(x)

def screenFunc(x, z):
    return 1.0 if int(x) % 2 == 0 else 1.0 + zj
    
```

Passed: 51.842224%
Reflected: 6.129849%
Absorption: 42.027926%

Wave length: 1
Wave angle: 30
Screen period: 6.28
Screen thickness: 2
Points X: 50
Points Z: 400

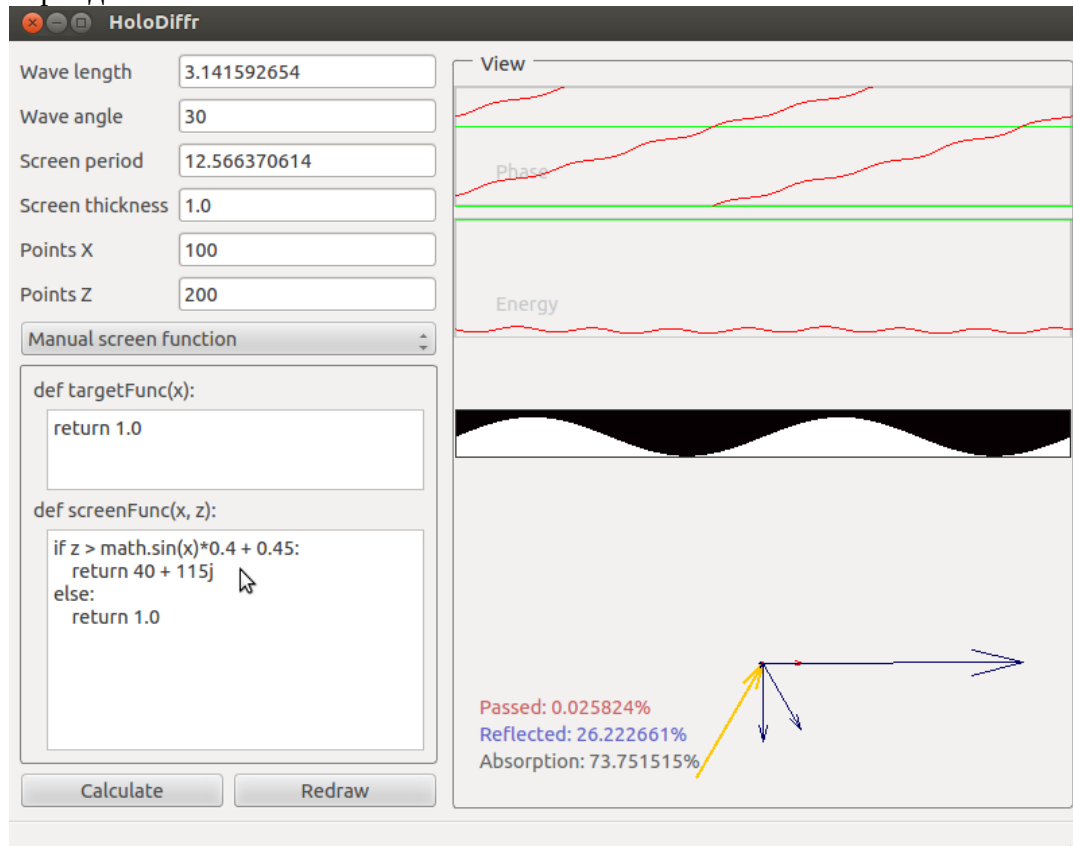
```

def targetFunc(x):
    return 1.0

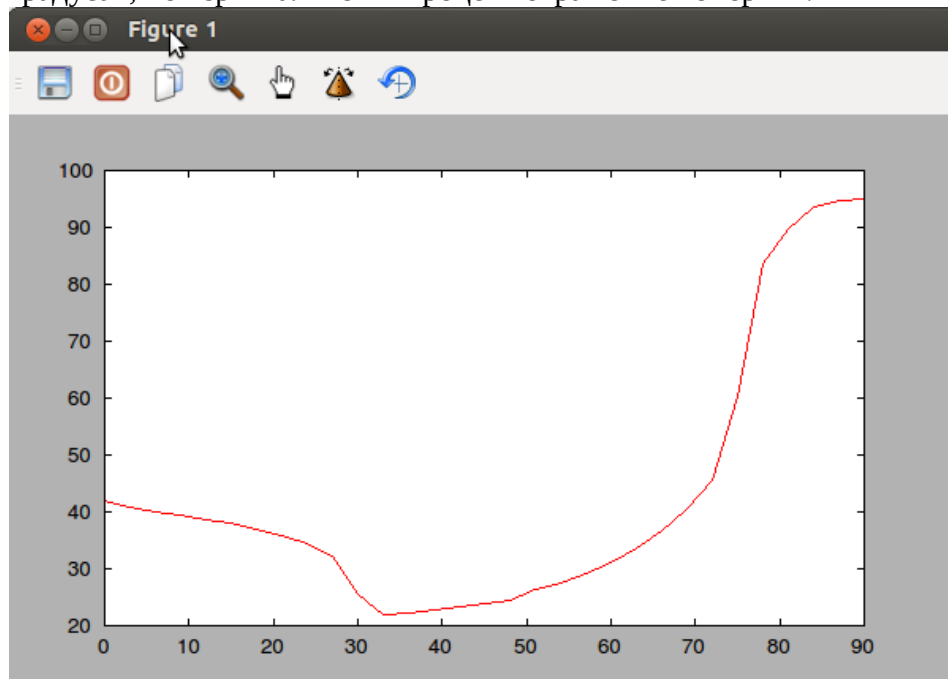
def screenFunc(x, z):
    if z > math.sin(x*2)*0.3+0.34:
        return 2.3 + 4j
    else:
        return 1.0
    
```

Passed: 0.000000%
Reflected: 5.089369%
Absorption: 94.910631%

Наблюдается аномалия Вуда в случае, когда возникает скользкая мода вдоль оси периодичности:

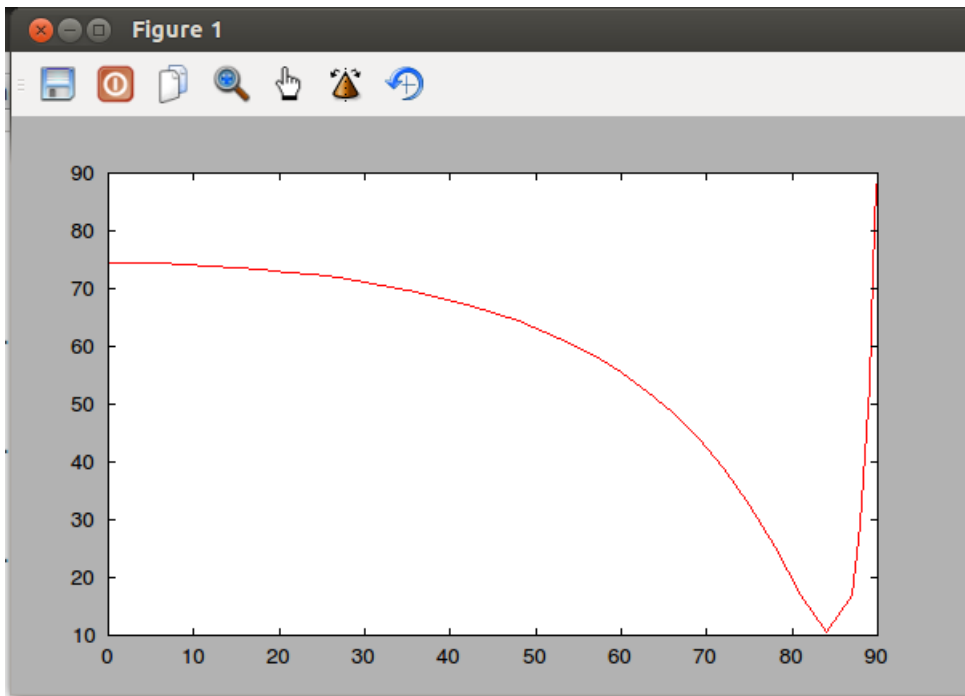


Серия экспериментов для данной поверхности. По горизонтальной оси отложен угол падения в градусах, по вертикальной – процент отражённой энергии:



Минимум отражения достигается при угле падения около 33 градусов.

Серия экспериментов для плоской границы раздела. По горизонтальной оси отложен угол падения в градусах, по вертикальной – процент отражённой энергии:



Можно наблюдать неравномерность изменения процента отражённой энергии в зависимости от угла падения с характерным минимумом (угол Брюстера). Этот эффект наблюдается только в случае Е-поляризации.

Характер зависимости совпадает с зависимостью, полученной аналитически (Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах, 1957 – стр.14):

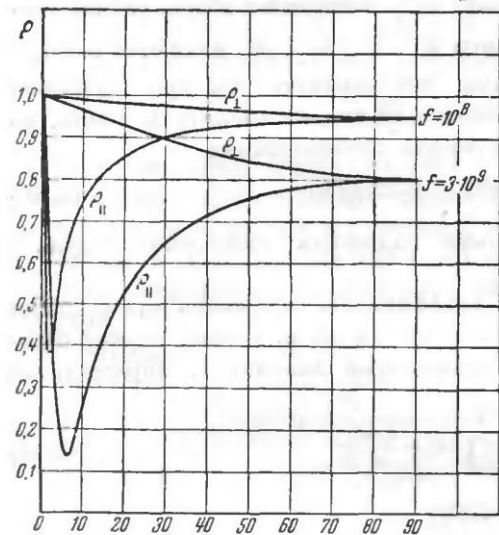


Рис. 2. Модуль коэффициента отражения электромагнитной волны на границе воздух—морская вода ($\epsilon = 81$, $\sigma = 3 \cdot 10^{10}$ CGSE) для двух частот и разных состояний поляризации. По оси абсцисс отложены углы скольжения $\chi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

Заключение.

Получен комплекс программ, позволяющий рассчитать прохождение и отражение плоской волны произвольной поляризации через периодическую неоднородную среду с цилиндрическим характером изменения показателя преломления. Решение прямой задачи предполагается расширить в дальнейшем на случай двумерной периодической структуры. Данный программный комплекс предполагается использовать для исследования границ применимости и модификации некоторых приближённых методов решения задач дифракции. Так же планируется решение обратной задачи восстановления спектра волнения поверхности по спектру излучения с помощью принципа двойственности и итерационных методов оптимизации, таких как метод градиентного спуска. Такие эффекты, как угол Брюстера и аномалия Вуда позволяют рассчитывать на успешное решение обратной задачи.

Литература.

1. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности – М.: Наука, 1974. – 424с.
2. *Воронович А.Г.* Приближение малых наклонов в теории рассеяния волн на неровных поверхностях. – ЖЭТФ. – 1985. - Т.89.№1(7) с.116-125
3. *Галишиникова Т.Н., Ильинский А.С.* Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. – М.: МАКС Пресс, 2013. - 248 с.
4. *Черник В.В.* Оценка размеров субволновой голографической маски и методы его минимизации // Труды 55-й научной конференции МФТИ «Аэрофизика и космические исследования». – 2012. – Т. 1. — С. 114-115.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. – М.: АН СССР, 1957. – 503с.