

**Комбинаторный и операторный подходы моделирования марковских процессов**

Е.К. Еферина

Российский университет дружбы народов

На основе идеологии Н. Г. ван Кампена [1] и К. В. Гардинера [2] нашим коллективом был сформулирован комбинаторный подход стохастизации марковских процессов, который позволяет по виду уравнений взаимодействия и предположении о характере процесса записать основное кинетическое уравнение. Но, как известно, методы для прямого исследования этого уравнения отсутствуют.

В комбинаторном подходе используется разложение Крамерса-Мойала. Оставив члены до второго порядка малости можно записать уравнение Фоккера-Планка и соответствующие ему уравнение Ланжевена. Однако уравнения – всего лишь приближенная запись основного кинетического уравнения.

Для исследования самого кинетического уравнения был сформулирован операторный подход [3,4], в котором применяется квантово-полевая теория возмущений статистических систем с использованием частичных сумм. Члены ряда рассматриваются как фейнмановские интегралы по траекториям. Все уравнения и оператор Лиувилля записываются в представлении чисел заполнения, что позволяет рассматривать системы с переменным числом частиц.

Ниже представлена схема двух подходов построения и исследования моделей, описанных марковскими процессами.

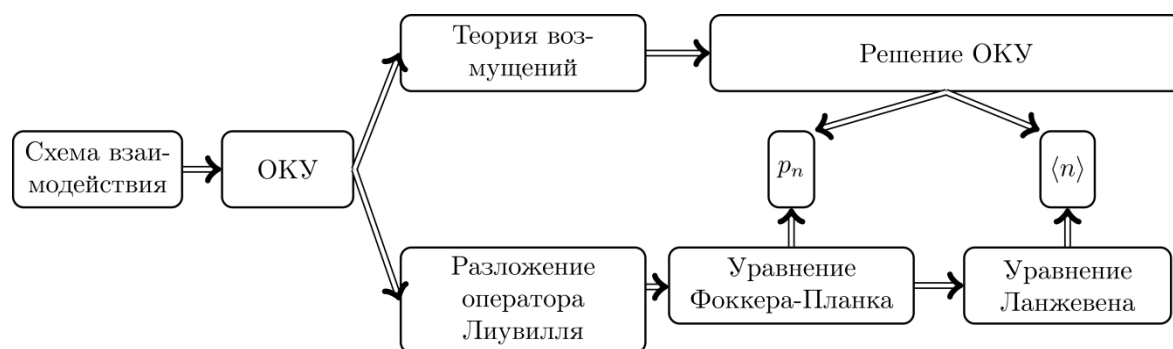


Рис.1. Схема комбинаторного и операторного подхода.

Для демонстрации двух подходов была выбрана модель Ферхюльста, описывающая ограниченный рост. Данная модель описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2.$$

$\lambda$  – коэффициент интенсивности размножения,  $\beta$  – коэффициент интенсивности вымирания,  $\gamma$  – коэффициент интенсивности уменьшения популяции.

Для модели Ферхюльста с помощью комбинаторного подхода были получены основное кинетическое уравнение, уравнение Фоккера-Планка и уравнение Ланжевена. Используя операторный подход, основное кинетическое уравнение было представлено через оператор Лиувилля.

После применения двух подходов к данной модели была выявлена полная их эквивалентность. Обосновать предпочтение одного или другого подхода на данный момент невозможно. Хотя нельзя не учесть, что при применении операторного подхода можно использовать наработки, сделанные в рамках квантовой теории поля.

#### Литература

1. *Ван-Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990.
2. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – Мир, 1986.
3. *Eferina E.G., et al.* One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package // Bulletin of People's Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". – 2014. – no. 3. – P. 46-59. – 1503.07342.
4. *Еферина Е.Г.* Применение квантово-полевых методов для исследования одношаговых процессов // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Аннотация докладов. В 3 томах. – М.: МИФИ, 2015. – С.257.