

Управление движением системы материальных точек на прямой с сухим трением
 посредством ограниченных внутренних сил.

П.А. Губко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Проблемы динамики и управления движением локомоционных систем, перемещающихся в сопротивляющихся средах за счет изменения конфигурации без специализированных внешних движителей (ног, колес, гусениц, гребных винтов и т.п.), актуальны и важны для инженерной механики и биомеханики. Подобным образом перемещаются животные, не имеющие конечностей (змеи, черви), а также некоторые рыбы (например, угорь). Этот принцип движения можно использовать в искусственных локомоционных системах (мобильных роботах). Роботы с изменяемой конфигурацией сравнительно просты конструктивно и легко поддаются миниатюризации. Последнее обстоятельство делает их перспективными для использования в стесненных пространствах (в узких трубах, в щелях). Создание мобильных роботов с изменяемой конфигурацией требует изучения динамических свойств систем, перемещающихся таким образом, анализа их управляемости, разработки принципов, систем и алгоритмов управления, а также оптимизации параметров конструкции и движений.

Движение одной из таких систем рассмотрено в данной работе. Система состоит из трех одинаковых тел (материальных точек), лежащих на горизонтальной прямой. Между точками действуют ограниченные по модулю внутренние силы взаимодействия, играющие роль управляющих переменных. Между точками и прямой действуют силы кулонова трения. Движение описанной системы определяется следующими дифференциальными уравнениями.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \quad \dot{x}_2 = v_2, \quad \dot{x}_3 = v_3, \\ m\dot{v}_1 &= -f_1 + F_1, \quad m\dot{v}_2 = f_1 - f_2 + F_2, \quad m\dot{v}_3 = f_2 + F_3 \end{aligned}$$

где m – масса каждой из материальных точек, x_i – координата i -ой точки вдоль прямой, v_i и f_i – скорость i -ой точки и управляющая сила, действующая на $(i+1)$ -ую точку со стороны точки i , F_i – сила трения, действующая на i -ую точку. Силы трения подчиняются закону Кулона

$$F_i = \begin{cases} -kmg \operatorname{sign}(v_i), & \text{если } v_i \neq 0 \\ -f_{i-1} + f_i & \text{если } v_i = 0 \text{ и } |f_{i-1} - f_i| \leq kmg \\ -kmg \operatorname{sign}(f_{i-1} - f_i), & \text{если } v_i = 0 \text{ и } |f_{i-1} - f_i| \geq kmg \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \quad f_0 = f_3 = 0$$

где k – коэффициент трения между точками системы и прямой, g – ускорение свободного падения.

Для описанной системы ставится задача оптимального управления. Пусть в начальный момент времени все точки системы покоятся и находятся в одной точке прямой (без ограничения общности будем считать эту точку началом координат)

$$x_i(0) = 0, v_i(0) = 0, i = 1, 2, 3.$$

Требуется определить законы управления $f_i(t)$, которые удовлетворяют ограничениям $|f_i| \leq f$ и переводят все точки системы за заданное время T в состояние покоя

$$x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = x(T)$$

и максимизируют смещение $x(T)$.

В работе [1] подобная задача решена для системы, состоящей из произвольного количества точек без ограничений на управляющие переменные. В этой работе доказано, что оптимальным является следующее управление. Первое тело начинает движение за счет того, что на него внутренней силой действует второе тело, на которое в свою очередь действует третье тело и т.д. Второе и последующие тела покоятся, потому что взаимодействуют друг с другом и первым телом так, чтобы не превышать максимально допустимую для каждого из этих тел силу трения покоя. В определенный момент с помощью внутренних сил (неограниченных) первое тело полностью передает свой импульс второму телу. Второе тело начинает наращивать полученный импульс таким же образом, как до этого его увеличивало первое тело. Далее процесс повторяется. Когда последнее тело пройдет данный цикл, система с помощью внутренних сил перераспределит импульс между всеми телами поровну и остаток времени проедет как единое целое до полной остановки.

По аналогии с работой [1], в которой описывается оптимальное управление системой с неограниченными внутренними силами, состоящей из произвольного количества точек, представлена схема управления рассматриваемой системой трех точек. Управление отличается от рассмотренного в работе [1] тем, что из-за ограничения на внутренние силы передача импульса от точки к точке происходит не мгновенно. Критерием оптимальности в работе является пройденное расстояние за заданное время, которое зависит от максимальной силы взаимодействия. Эта зависимость монотонна. Если максимальную величину управляющих сил устремить к бесконечности, движение при ограниченных силах перейдет в движение, найденное в работе [1]. В этом смысле управление стремится к оптимальному.

Литература

1. *Фигурин Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением. – Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2015. – No 4.