УДК 531.381

Моделирование задач о вращении твердого тела.

М.В. Тарасов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Работа посвящена визуальной геометрической интерпретации некоторых понятий классической механики. В качестве примера рассматривается так называемый эффект Джанибекова, на котором легко проиллюстрировать сразу три элемента классической механики, которые обычно довольно затруднительно воспринимать исключительно по формулам: задача ориентации твёрдого тела, задача о движении твёрдого тела с неподвижной точкой (в случае Эйлера-Пуансо) и, наконец, прямой метод Ляпунова исследования устойчивости.

Эффект Джанибекова проявляется при вращении тела вокруг главной оси со средним моментом инерции, которое, вследствие неустойчивости этого движения, сопровождается периодической сменой направления оси вращения. Эффект можно продемонстрировать, решая уравнения Пуассона, описывающие ориентацию твёрдого тела (в кватернионном описании) (угловая скорость записана в проекциях на связанные с телом оси):

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega \qquad (1)$$

и динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{B-C}{A}\omega_y\omega_z \\ \dot{\omega}_y &= \frac{C-A}{B}\omega_x\omega_z \\ \dot{\omega}_z &= \frac{A-B}{C}\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (2)$$

Неустойчивость вращения вокруг главной оси со средним моментом инерции с помощью метода Ляпунова показана, например, в [1], где в качестве функции Ляпунова предлагается $V = U_1^2 + U_2^2$, где $U_1 = 2T, U_2 = K_O^2$.

В качестве инструмента для визуализации был разработан комплекс программ, интерфейс которого показан на рис. 1. В первом окне (рис. 1а) демонстрируется твёрдое тело с неподвижной точкой, ориентация которого определяется параметрами Родрига-Гамильтона, а движение получается в результате интегрирования уравнений (1) и (2).

Решение уравнений Эйлера записывается в эллиптических функциях, что затрудняет интерпретацию движения, поэтому, возвращаясь к выбранному в качестве примера эффекту

Джанибекова, перейдём к описанию второго окна интерфейса разработанной программы. В нем представлен эллипсоид Мак-Куллага [2], который, как показано в [3] служит замечательной геометрической интерпретацией движения тела в случае Эйлера. Эллипсоид получен пересечением поверхностей уровня двух интегралов движения уравнений (2) - кинетической энергии $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = const$ и кинетического момента $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 = const$. Линия пересечения этих поверхностей соответствует траектории конца вектора кинетического момента в связанных с телом осях (рис. 1б).

Последнее окно программы демонстрирует работу метода Ляпунова для устойчивых и неустойчивых движений. Прямой метод Ляпунова позволяет определять устойчивость или неустойчивость равновесия с помощью знака производной функции Ляпунова в силу уравнений движения. Записав эту производную как

$$\frac{dV}{dt} = \left(gradV, \frac{dX}{dt} \right), \text{ где } gradV = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_n} \right), \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt} \right)$$

можно легко представить смысл метода графически - отрицательная производная функции Ляпунова соответствует тупому углу между векторами градиента функции Ляпунова и касательной к траектории, что означает стремление траектории к нулевому равновесию.

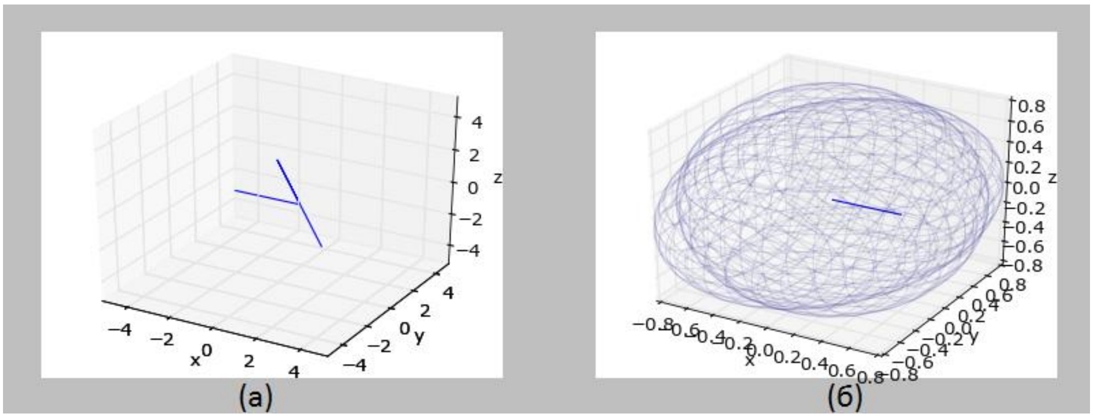

Рис. 1. Интерфейс программы: а) вращение твердого тела с неподвижной точкой; б) эллипсоид Мак-Куллага и изменение вектора кинетического момента.

Литература

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов //М.: ЧеРо. – 1999. – 519-526 с.
2. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. Изд. 2-е, перераб. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 86-86 с.
3. *Петров А.Г., Володин С.Е.* "Эффект Джанибекова" и законы механики, Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 451, № 4, август. – С. 399-403
4. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела //М.: МФТИ. – 2010.