УДК 519.17

Т-неприводимые расширения для многоугольных орграфов и для выходящих сверхстройных деревьев

А. В. Гавриков

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Введение

Под *ориентированным графом (или, для краткости, орграфом)* понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, где V — это конечное непустое множество (вершины орграфа), а α — это отношение на множестве V (дуги орграфа). Дуга в орграфе $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется *инцидентной* вершине v, если вершина v — конец или начало этой дуги. *Вложение* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ в орграф $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$ — это взаимно однозначное отображение $\phi : V \to W$, такое что $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \to (\phi(u), \phi(v)) \in \beta)$. При этом говорят, что орграф $\overrightarrow{G}$ вкладывается в орграф $\overrightarrow{H}$. *Часть* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ — это орграф $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$ такой, что $W \subseteq V$ и $\beta \subseteq (W \times W) \cap \alpha$. Часть орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ является *подграфом* орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, если $\beta = (W \times W) \cap \alpha$. Подграф $\overrightarrow{H}$ *максимален*, если он получается из исходного орграфа $\overrightarrow{G}$ удалением одной вершины v и всех инцидентных ей дуг. *Расширение* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ — это орграф $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, такой, что $|W| = |V| + 1$ и орграф $\overrightarrow{G}$ вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа $\overrightarrow{H}$. *Объединение* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ и орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, таких что $V \cap W = \varnothing$, — это орграф $\overrightarrow{G} \cup \overrightarrow{H} = (V \cup W, \alpha \cup \beta)$. *Соединение* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ и орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, таких что $V \cap W = \varnothing$, — это орграф $\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H} = (V \cup W, \alpha \cup \beta \cup V \times W \cup W \times V)$. *Изоморфизм* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ на орграф $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$ — это взаимно однозначное соответствие $\phi : V \to W$, сохраняющее отношение смежности, т. е. $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in \beta)$. *Изоморфность* орграфа $\overrightarrow{G}$ и орграфа $\overrightarrow{H}$ обозначается через $\overrightarrow{G} \cong \overrightarrow{H}$. Орграфы $\overrightarrow{G}$ и $\overrightarrow{H}$ в этом случае называются *изоморфными* [1]).

Тривиальное расширение (для краткости, ТР) орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ — это соединение $\overrightarrow{G} + w$ исходного орграфа $\overrightarrow{G}$ с вершиной $w \notin V$. В силу того, что тривиальное расширение орграфа $\overrightarrow{G}$ единственное с точностью до изоморфизма, возможно ввести функцию ТР($\overrightarrow{G}$). *Т-неприводимое расширение* (для краткости, ТНР) орграфа $\overrightarrow{G}$ — это расширение исходного орграфа $\overrightarrow{G}$, полученное удалением максимального множества дуг из ТР($\overrightarrow{G}$) (см. [2]). ТНР для некоторых классов неориентированных (т. е. с симметричным и антирефлексивным отношением смежности) графов рассматривались С. Г. Курносовой в работах [2, 3]. В работе [3] показаны конструкции ТНР для полных бинарных деревьев.

Т-неприводимые расширения являются одним из видов оптимальных расширений для орграфов. Конструкции оптимальных расширений применяются в диагностике дискретных систем и криптографии [4], а также в задачах отказоустойчивости [5, 6]. В общем случае задача определения того, является ли орграф $\overrightarrow{H}$ расширением для орграфа $\overrightarrow{G}$, является $\mathbb{NP}$-полной, а задача поиска ТНР по заданному орграфу $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ не принадлежит классу $\mathbb{NP}$ [7].

Следующий критерий, на который опирается доказательство процедуры построения ТНР, вытекает непосредственно из определения.

Теорема 1 (критерий ТНР для орграфов).

Орграф $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$ является ТНР для орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1) $|W| = |V| + 1$;

2) в орграфе $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$ существует вершина w, такая что $\overrightarrow{H} - w \cong \overrightarrow{G}$;

3) орграф $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ вкладывает в каждый максимальный подграф $\overrightarrow{H} - u$ орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, где $u \neq w$;

4) (свойство неприводимости). При удалении любой дуги, инцидентной вершине w, то есть $(u, w) \in \beta$ или $(w, u) \in \beta$, из орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, полученный орграф не будет расширением для $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$.

Общие сведения о многоугольных орграфах

Путь в орграфе — последовательность дуг вида (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\cdots$, (v_{n-2}, v_{n-1}), где $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$, $0 \leq i \leq n-2$, и никакая дуга не встречается более одного раза. Путь в орграфе является *простым*, если каждая его вершина принадлежит не более чем двум его дугам. *Длина пути* — это количество входящих в него дуг. Путь является *циклическим*, если $v_0 = v_{n-1}$. *Контур* в орграфе — это простой циклический путь. Контур, состоящий из n вершин, обозначим через $\overrightarrow{C_n} = v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_0$, считая v_0 выбранной начальной вершиной. Многоугольным орграфом порядка n называется всякий орграф $\overrightarrow{M}$, полученный переориентацией некоторых дуг контура $\overrightarrow{C}_n$ [8].

Степень исхода вершины v — это количество дуг в орграфе $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, имеющих своим началом вершину v. Степень исхода вершины v обозначают через $d^+(v)$, $d^+(v) = |\alpha(v)|$. *Степень захода вершины* v — это количество дуг в орграфе $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, имеющих своим концом вершину v. Степень захода вершины v обозначают через $d^-(v)$, $d^-(v) = |\alpha^{-1}(v)|$. Вершина v называется *источником*, если ее степень захода равна 0, $d^-(v) = 0$. Вершина v называется *стоком*, если ее степень исхода равна 0, $d^+(v) = 0$. Сумма степеней исхода и захода каждой вершины многоугольного орграфа $\overrightarrow{M} = (Z, \gamma)$ равна 2, $(\forall v \in Z)(d^+(v) + d^-(v) = 2)$. Назовем две вершины u и v орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ *смежными*, если в орграфе существует дуга $(u, v) \in \alpha$ или дуга $(v, u) \in \alpha$. Все арифметические операции над индексами вершин в многоугольных орграфах в дальнейшем будем производить по модулю числа n. Для любой вершины v_i, $0 \leq i \leq n-1$ многоугольного орграфа $\overrightarrow{M}$ смежными вершинами являются вершины v_{i-1} и v_{i+1}.

Пусть b — это некоторый двоичный вектор, через b_i обозначим его i-ую компоненту. Двойственным вектором для двоичного вектора b называется вектор b^δ, получаемый из b, если компоненты вектора b записать в обратном порядке, а затем взаимно заменить в компонентах нули и единицы, т. е. осуществить преобразование $b \to (b^{-1})'$. К примеру, для $b = 00101$ будет $b^\delta = 01011$. Очевидно, что $b^{\delta\delta} = b$ [8].

Двоичные векторы можно использовать для кодирования многоугольных орграфов. Пусть $\overrightarrow{M}$ — многоугольный орграф, полученный переориентацией некоторых дуг контура $\overrightarrow{C_n}$ порядка n. Выберем в $\overrightarrow{M} = (Z, \gamma)$ в качестве начальной вершины вершину v_0 и построим n-мерный двоичный вектор b^0, полагая $b^0_i = 1$, если $(v_i, v_{i+1}) \in \gamma$ и $b^0_i = 0$, если $(v_{i+1}, v_i) \in \gamma$. Аналогично строятся векторы b^1, b^2, $\cdots$, b^{n-1}. К примеру, для многоугольного орграфа $\overrightarrow{M} = v_0 \to v_1 \leftarrow v_2 \to v_3 \leftarrow v_0$ порядка 4 получим $b^0 = 1010$, $b^1 = 0101$, $b^2 = 1010$, $b^3 = 0101$. С другой стороны, каждому n-мерному вектору b^s, $0 \leq s \leq n-1$ соответствует многоугольный орграф $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}(b^s)$ порядка n, получающийся из контура $\overrightarrow{C_n}$ с выбранной начальной вершиной v_s, переориентацией некоторых его дуг, согласованный в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора b^s. К примеру, для $b^1 = 00101$ будет $\overrightarrow{M}(b^1) = v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftarrow v_0 \rightarrow v_1$.

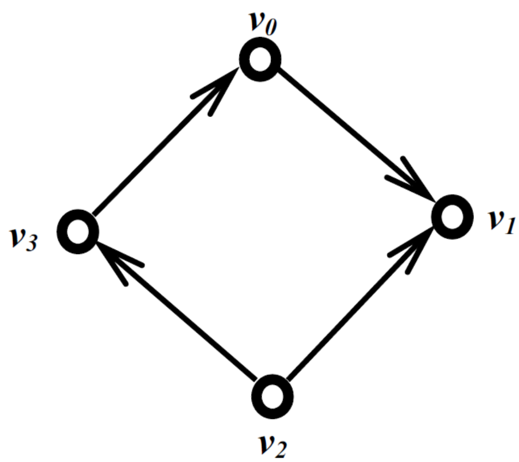

Рис. 1. Многоугольный орграф $\overrightarrow{M}$.

Выберем из $2n$ векторов b^0, b^1, $\cdots$, b^{n-1}, b^{0^δ}, b^{1^δ}, $\cdots$, b^{n-1^δ} многоугольного орграфа $\overrightarrow{M}$ лексикографически минимальный вектор и обозначим его через $b = b(\overrightarrow{M})$. Вектор $b = b(\overrightarrow{M})$ сопоставляется многоугольному орграфу $\overrightarrow{M}$ и называется его двоичным кодом. К примеру, для многоугольного орграфа $\overrightarrow{M}$ на рис. 1 получим $b^0 = 1011$, $b^1 = 0111$, $b^2 = 1110$, $b^3 = 1101$, $b^{0^\delta} = 0010$, $b^{1^\delta} = 0001$, $b^{2^\delta} = 1000$, $b^{3^\delta} = 0100$, следовательно, $b(\overrightarrow{M}) = 0001$. Понятно, что два многоугольных орграфа $\overrightarrow{M_1}$ и $\overrightarrow{M_2}$ изоморфны тогда и только тогда, когда их двоичные коды $b(\overrightarrow{M_1})$ и $b(\overrightarrow{M_2})$ покомпонентно равны, $\overrightarrow{M_1} \cong \overrightarrow{M_2} \Leftrightarrow b(\overrightarrow{M_1}) = b(\overrightarrow{M_2})$.

Кодирование многоугольных орграфов двоичными векторами будет широко использоваться в алгоритмах построения ТНР для многоугольных орграфов. Также такое кодирование позволяет значительно сократить запись многоугольных орграфов по сравнению с матрицей смежности и компактно хранить их в памяти ЭВМ.

Т-неприводимые расширения для четных многоугольных орграфов

Под четными многоугольными орграфами будем понимать многоугольные орграфы с четным количеством вершин. Ниже будет описано одно из ТНР для четных многоугольных орграфов в явном виде. Прежде чем указать явный вид ТНР для четных многоугольных орграфов необходимо показать виды вложений многоугольных орграфов в некоторый максимальный подграф их ТНР. При этом количество вложений полиномиально зависит от порядка многоугольного орграфа n. Напомним, что все операции над индексами вершин многоугольных орграфов будут рассматриваться далее по модулю их порядка n.

Пусть $M = (Z, \gamma)$ — многоугольный орграф порядка n, полученный произвольной переориентацией дуг контура $C_n = v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_0$, а $H = (W, \beta)$ — одно из его ТНР. Тогда вложение $\phi : Z \rightarrow (W - v_i)$ многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_i$, можно задать одним из $2n$ способов. Существует n вложений "по часовой стрелке" и n вложений "против часовой стрелки".

Вложение k "по часовой стрелке", где $0 \leq k \leq n-1$.

— $\phi(v_j) = v_{j+k}$, где $v_j \in W, j \neq i - k$;

— $\phi(v_{i-k}) = w$;

Вложение k "по часовой стрелке" задано таблицей 1.

Таблица 1. Вложения "по часовой стрелке"

φ	v_0	v_1	...	v_{i-k-1}	v_{i-k}	v_{i-k+1}	...	v_{i-1}	v_i	v_{i+1}	...	v_{n-2}	v_{n-1}
	v_k	v_{k+1}	...	v_{i-1}	w	v_{i+1}	...	v_{i+k-1}	v_{i+k}	v_{i+k+1}	...	v_{k-2}	v_{k-1}

На языке двоичных векторов, вложение k "по часовой стрелке" возможно тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

— $b_j = b_{j+k}$, где $0 \leq j \leq n-1, j \neq i-k-1, i-k$

— если $b_{i-k-1} = 1$, то $(v_{i-1}, w) \in \beta$, иначе $(w, v_{i-1}) \in \beta$;

— если $b_{i-k} = 1$, то $(w, v_{i+1}) \in \beta$, иначе $(v_{i+1}, w) \in \beta$;

Вложение k "против часовой стрелки", где $0 \leq k \leq n-1$.

— $\phi(v_j) = v_{n+k-j-1}$, где $v_j \in W, j \neq n-i-1$;

— $\phi(v_{n-i-1}) = w$;

Вложение k "против часовой стрелки" задано таблицей 2.

Таблица 2. Вложения "против часовой стрелки"

φ	v_0	v_1	...	v_{i-1}	v_i	v_{i+1}	...	v_{n-i-2}	v_{n-i-1}	v_{n-i}	...	v_{n-1}	v_n
	v_{k-1}	v_{k-2}	...	v_{k-i}	v_{k-i-1}	v_{k-i-2}	...	v_{k+i+1}	w	v_{k+i-1}	...	v_{k+1}	v_k

На языке двоичных векторов, вложение k "против часовой стрелки" возможно тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

— $b_j = b_{k-j-1}$, где $0 \leq j \leq n-1, j \neq n-i-2, n-i-1$;

— если $b_{n-i-2} = 1$, то $(v_{k+i+1}, w) \in \beta$, иначе $(w, v_{k+i+1}) \in \beta$;

— если $b_{n-i-1} = 1$, то $(w, v_{k+i-1}) \in \beta$, иначе $(v_{k+i-1}, w) \in \beta$;

Теорема 2. Пусть $M = (Z, \gamma)$ — многоугольный орграф порядка n, полученный произвольной переориентацией дуг контура $C_n = v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_0$, а $H = (W, \beta)$ — одно из его ТНР. Тогда вложение $\phi : Z \to (W - v_i)$ многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_i$ можно задать только одним из $2n$ способов, представленных таблицами 1 и 2.

Доказательство. Других вложений многоугольного орграфа M в произвольный максимальный подграф $H - v_i$ его ТНР H, кроме $2n$ вышеперечисленных, не существует. Действительно, в максимальном подграфе $H - v_i$ обязательно должна быть часть, изоморфная многоугольному орграфу M. А это возможно тогда и только тогда, когда вершина w в максимальном подграфе $H - v_i$ его ТНР H смежна с вершинами v_{i-1} и v_{i+1}. При любом другом, отличном от $2n$ перечисленных способов, в максимальном подграфе $H - v_i$ его ТНР H не будет части, изоморфной какому-либо многоугольному подграфу. ■

Следующая теорема показывает одно из ТНР для четных многоугольных орграфов в явном виде.

Теорема 3. *Пусть $M = (Z, \gamma)$ — четный многоугольный орграф порядка n. Тогда одним из его ТНР будет орграф $H = (W, \beta)$, где $W = Z \cup \{w\}$, $\beta = \gamma \cup \{(v, w) | v \in Z, d^-(v) = 0\}$ $\cup \{(w, v) | v \in Z, d^+(v) = 0\} \cup \{(v, w), (w, v) | v \in Z, d^+(v) = 1, d^-(v) = 1\}$.*

Доказательство. Рассмотрим орграф $H = (W, \beta)$, построенный по рецепту теоремы. Для доказательства корректности необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы -5 (критерия ТНР для орграфов):

1. $|W| = |Z| + 1$, так как $Z = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}, W = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}, w\}$.

2. Очевидно, что $M \cong H - w$ в силу построения.

3. Орграф H является расширением для многоугольного орграфа M. Действительно, при вложении $\phi : Z \to (W - v_i)$ многоугольного орграфа M в некоторый максимальный подграф $H - v_i$ орграфа H, полученный удалением вершины v_i, вершину v_i отобразим в вершину w, $\phi(v_i) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

4 (Свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине w из орграфа H, полученный орграф не будет расширением для орграфа G.

Рассмотрим вершины, являющиеся источниками в исходном четном многоугольном орграфе M. Пусть вершина $v_i \in Z$ — некоторый источник. Тогда по построению из вершины v_i входит дуга (v_i, w) в вершину w в орграфе H. В случае удаления дуги (v_i, w) максимальные орграфы $H-(v_i, w)-v_{i-1}$ и $H-(v_i, w)-v_{i+1}$ орграфа $H-(v_i, w)$ содержат вершину-источник v_i, которой инцидентна только одна выходящая дуга (v_i, v_{i+1}) и (v_i, v_{i-1}) соответственно. В то время как каждой вершине четного многоугольного орграфа M инцидентно ровно две дуги. Т. е. вложение четного многоугольного орграфа M в один из максимальных подграфов орграфа $H - (v_i, w)$ невозможно.

Рассмотрим вершины, являющиеся стоками в исходном четном многоугольном орграфе M. Пусть вершина $v_i \in Z$ — некоторый сток. Тогда по построению в вершину v_i входит дуга (w, v_i) из вершины w в орграфе H. В случае удаления дуги (w, v_i) максимальные орграфы $H-(w, v_i)-v_{i-1}$ и $H-(w, v_i)-v_{i+1}$ орграфа $H-(w, v_i)$ содержат вершину-сток v_i, которой инцидентна только одна выходящая дуга (v_{i+1}, v_i) и (v_{i-1}, v_i) соответственно. В то время как каждой вершине четного многоугольного орграфа M инцидентно ровно две дуги. Т. е. вложение четного многоугольного орграфа M в один из максимальных подграфов орграфа $H - (w, v_i)$ невозможно.

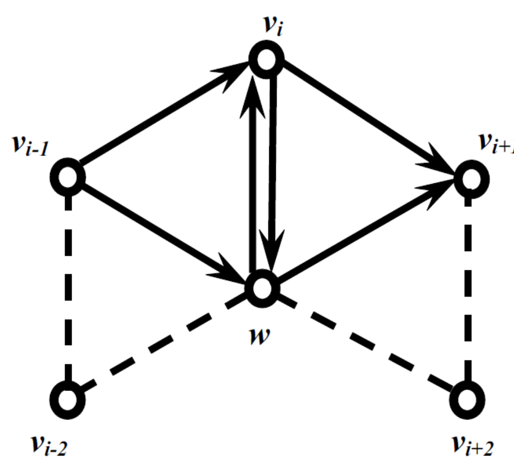

Рис. 2. Одна из вершин многоугольного орграфа M, имеющая степень исхода и степень захода, равные 1

Рассмотрим вершины $v \in Z$, имеющие в исходном четном многоугольном орграфе M степень исхода и степень захода, равные 1. Одна из таких вершин v_i изображена на рис. 2. Пунктирные линии на рис. 2, соединяющие пары вершин, означают, что между ними может быть как одна дуга в любом из направлений, так и две дуги. Пусть для определенности, нумерация вершин выбрана так, что из вершины v_{i-1} следует дуга (v_{i-1}, v_i) в вершину v_i, а из вершины v_i следует дуга (v_i, v_{i+1}) в вершину v_{i+1}. По утверждению теоремы в орграфе H вершина v_i соединена встречными дугами (v_i, w) и (w, v_i) с вершиной w.

Заметим, что по построению, дуги (v_{i-1}, w), (w, v_{i+1}) присутствуют в расширении H вне зависимости от ориентации дуги между вершинами v_{i-2} и v_{i-1}, а также вершинами v_{i+1} и v_{i+2}. Действительно, если в исходном четном многоугольном орграфе M присутствует дуга (v_{i-2}, v_{i-1}), т. е. $b_{i-2} = 1$, то в орграфе H вершина v_{i-1} соединена встречными дугами (w, v_{i-1}) и (v_{i-1}, w) с вершиной w; если в исходном четном многоугольном орграфе M присутствует дуга (v_{i-1}, v_{i-2}), т. е. $b_{i-2} = 0$, $d^-(v_{i-1}) = 0$, то в орграфе H вершина v_{i-1} соединена дугой (v_{i-1}, w) с вершиной w. Аналогичные рассуждения применимы для ориентации дуги между вершинами v_{i+1} и v_{i+2}.

Заметим, что если дуга (v_{i-2}, v_{i-1}) принадлежит четному многоугольному орграфу M, $(v_{i-2}, v_{i-1}) \in \gamma$, т. е. $b_{i-2} = 1$, то по построению дуга $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$. Действительно, если $d^-(v_{i-2}) = 0$, то есть вершина v_{i-2} является источником, дуга $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$ присутствует в орграфе H; если $d^+(v_{i-2}) = 1$ и $d^-(v_{i-2}) = 1$, то в орграфе H вершина v_{i-2} соединена встречными дугами (v_{i-2}, w) и (w, v_{i-2}) с вершиной w. В любом случае, если дуга $(v_{i-2}, v_{i-1}) \in \gamma$, т. е. $b_{i-2} = 1$, то дуга $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$. Если дуга (v_{i-1}, v_{i-2}) присутствует в четном многоугольном орграфе M, $(v_{i-1}, v_{i-2}) \in \gamma$, т. е. $b_{i-2} = 0$, то по построению дуга $(w, v_{i-2}) \in \gamma'$. Действительно, если $d^+(v_{i-2}) = 0$, то есть вершина v_{i-2} является стоком, дуга $(w, v_{i-2}) \in \gamma'$ присутствует в орграфе H; если $d^+(v_{i-2}) = 1$ и $d^-(v_{i-2}) = 1$, то в орграфе H вершина v_{i-2} соединена встречными дугами (v_{i-2}, w) и (w, v_{i-2}) с вершиной w. В любом случае, если дуга $(v_{i-1}, v_{i-2}) \in \gamma$, т. е. $b_{i-2} = 0$, то дуга $(v_{i-2}, w) \in \gamma'$. Аналогичные рассуждения справедливы для ориентации дуги между вершинами v_{i+1} и v_{i+2}. Если дуга $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in \gamma$, т. е. $b_{i+1} = 1$, то дуга $(w, v_{i+2}) \in \gamma'$; если дуга $(v_{i+2}, v_{i+1}) \in \gamma$, т. е. $b_{i+1} = 0$, то дуга $(v_{i+2}, w) \in \gamma'$.

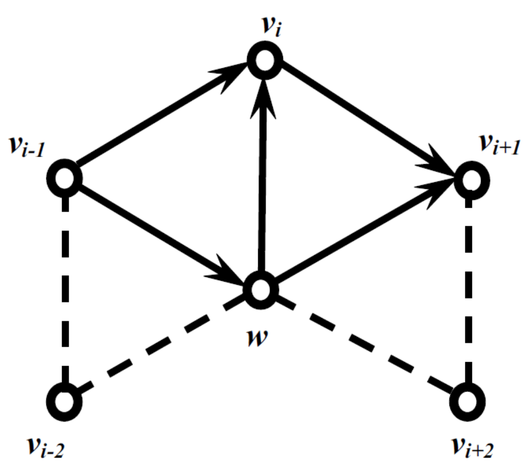

Рис. 3. Орграф $H - (v_i, w)$

Четный многоугольный орграф M имеет двоичный вектор $b^0(M) = (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{i-2}, 1, 1, b_{i+1}, \cdots, b_{n-2}, b_{n-1})$, в силу вышеописанной нумерации его вершин, при которой $b_{i-1} = 1$ и $b_i = 1$. Покажем, что ни дугу (v_i, w), ни дугу (w, v_i) нельзя удалить из орграфа H без нарушения свойства "быть расширением" для многоугольного орграфа M.

Рассмотрим орграф $H-(v_i, w)$, изображенный на рис. 3. Докажем, что четный многоугольный орграф M не вкладывается в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - (v_i, w)$. Для этого покажем, что не выполняется ни одно из $2n$ вложений четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - (v_i, w)$. Все $2n$ возможных вложений описаны в Теореме 2. Единственной частью орграфа $H - v_{i+1} - (v_i, w)$, являющейся многоугольным орграфом, является часть, образованная дугами между парами вершин v_0 и v_1, v_1 и v_2, $\cdots$, v_{i-2} и v_{i-1}, дугой (v_{i-1}, v_i), дугой (w, v_i), дугой между вершинами w и v_{i+2} и дугами между парами вершин v_{i+2} и v_{i+3}, v_{i+3} и v_{i+4}, $\cdots$, v_{n-1} и v_n, v_n и v_0. При этом, если вершина v_{i+2} в многоугольном орграфе M является источником или стоком, то направление дуги между вершинами w и v_{i+2} совпадает с направлением дуги между вершинами v_{i+1} и v_{i+2}; если $d^+(v_{i+2}) = 1$ и $d^-(v_{i+2}) = 1$, то между вершиной w и v_{i+2} существуют встречные дуги (w, v_{i+2}), (v_{i+2}, w) по построению. Обозначим данную часть орграфа $H - v_{i+1} - (v_i, w)$, являющуюся многоугольным орграфом, через F. Часть F имеет двоичный вектор $b^0(F) = (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{i-2}, 1, 0, b_{i+1}, \cdots, b_{n-2}, b_{n-1})$, при этом $b^0_j(M) = b^0_j(F)$, где $0 \le j \le n-1, j \ne i$.

Очевидно, что вложение 0 "по часовой стрелке" многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - v_{i+1}$ не выполняется, так как i-ый элемент в двоичном векторе $b^0(M)$ равен 1, а i-ый в двоичном векторе $b^0(F)$ равен 0, $b^0_i(M) \ne b^0_i(F)$. Покажем, что также не выполняется ни одно из других $n-1$ вложений "по часовой стрелке". При вложении k "по часовой стрелке", где $1 \le k \le n-1$ четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - v_{i+1}$ должно выполняться $1 = b^0_i(M) = b^0_{i+k}(F) = b^0_{i+k}(M) = b^0_{i+2k}(F) = b^0_{i+2k}(M) = \cdots = b^0_{i+lk}(F) = b^0_{i+lk}(M)$, где $l = 1, 2, 3, \cdots$, так как $b_j = b_{j+k}$, где $0 \le j \le n-1, j \ne i-k-1, i-k$, по условию теоремы 2 для всех вложений "по часовой стрелке". При $l = 2n$ получаем, что $1 = b^0_i(M) = \cdots = b^0_{i+2nl}(F) = b^0_{i+2nl}(M) = b^0_i(M) = 0$, то есть приходим к противоречию. В силу произвольного выбора значения k, получаем, что ни одно из n вложений "по часовой стрелке" четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - v_{i+1}$ не выполняется.

Теперь покажем, что ни одно из вложений "против часовой стрелки" четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - v_{i+1}$ не выполняется. Пусть среди элементов b^0_i, где $1 \le i \le i-2, i+1 \le i \le n-1$, двоичного вектора $b^0(M)$ k_0 элементов являются нулями и k_1 являются единицами. Тогда в двоичном векторе $b^0(M)$ k_0 элементов принимают значение 0, а $k_1 + 2$ элемента принимают значение 1, так как $b^0_{i-1}(M) = 1$ и $b^0_i(M) = 1$. Так как порядок n является четным, то $\exists n_1 \in Z : 2n_1 = n$, при этом $k_0 + k_1 + 2 = 2n_1$. При любом вложении k "против часовой стрелки", где $0 \le k \le n-1$ в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$, многоугольный орграф M должен быть изоморфен части, у которой в двоичном векторе $k_1 + 1$ нулей, так как $(b^0_i(M))' = 0$, и $k_0 + 1$ единиц, так как $(b^0_{i+1}(M))' = 1$. Ясно, что если два многоугольных орграфа изоморфны, то количество нулей и единиц в их двоичных векторах должно совпадать. В данном случае, при любом из n вложений "против часовой стрелки", необходимо выполнение эквивалентных условий $k_0 = k_1 + 1$ (одинакое количество нулей) и $k_1 + 2 = k_0 + 1$ (одинаковое количество единиц). Но так как порядок $n = 2n_1$ многоугольного орграфа M четный, $k_0 = k_1 + 1$ и $k_0 + k_1 = 2n_1$, то не существует целых неотрицательных чисел k_0 и k_1, удовлетворяющих этим условиям, при любом целом положительном $n \ge 4$. Действительно, это возможно только если $k_0 = \frac{2n_1+1}{2}$, а при любом целом неотрицательном n_1 значение $\frac{2n_1+1}{2}$ не будет являться целым числом. Получаем, что ни одно из n вложений "против часовой стрелки" четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ не выполняется.

Таким образом, доказано, что дугу (v_i, w) нельзя удалить из орграфа H без потери свойства "быть расширением", так как многоугольный орграф M не вкладывается в максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - (w, v_i)$.

Далее рассмотрим орграф $H - (w, v_i)$, изображенный на рис. 4. Докажем, что четный многоугольный орграф M не вкладывается в максимальный подграф $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ орграфа $H - (w, v_i)$. Для этого покажем, что не выполняется ни одно из $2n$ вложений четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ орграфа

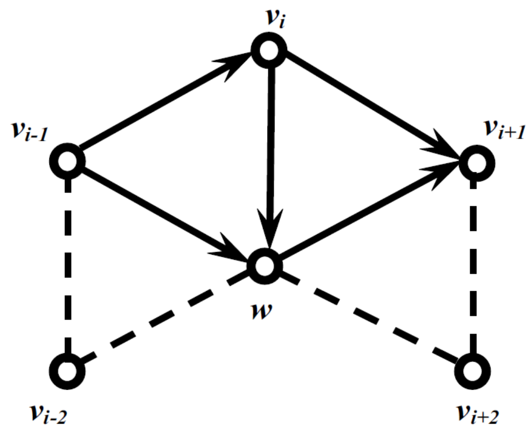

Рис. 4. Орграф $H-(w,v_i)$

$H-v_{i-1}$. Единственной частью орграфа $H-v_{i-1}-(w,v_i)$, являющейся многоугольным орграфом, является часть, образованная дугами между парами вершин v_0 и v_1, v_1 и v_2, $\cdots$, v_{i-3} и v_{i-2}, дугой между вершинами v_{i-2} и w, дугой (v_i,w), (v_i,v_{i+1}), и дугами между парами вершин v_{i+1} и v_{i+2}, v_{i+2} и v_{i+3}, $\cdots$, v_{n-1} и v_n, v_n и v_0. При этом, если вершина v_{i-2} в четном многоугольном орграфе M является источником или стоком, то направление дуги между вершинами v_{i-2} и w совпадает с направлением дуги между вершинами v_{i-2} и v_{i-1}; если $d^+(v_{i-2})=1$ и $d^-(v_{i-2})=1$, то между вершиной v_{i-2} и w существуют встречные дуги (w,v_{i-2}), (v_{i-2},w) по построению. Обозначим данную часть орграфа $H-v_{i-1}-(w,v_i)$, являющуюся многоугольным орграфом, через F. Часть F имеет двоичный вектор $b^0(F)=(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{i-2},0,1,b_{i+1},\cdots,b_{n-2},b_{n-1},b_n)$, при этом $b^0_j(M)=b^0_j(F)$, где $0\le j\le n, j\neq i-1$.

Очевидно, что вложение 0 "по часовой стрелке" четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H-v_{i-1}-(w,v_i)$ не выполняется, так как $(i-1)$-ый элемент в двоичном векторе $b^0(M)$ равен 1, а $(i-1)$-ый в двоичном векторе $b^0(F)$ равен 0, $b^0_{i-1}(M)\neq b^0_{i-1}(F)$. Покажем, что также не выполняется ни одно из других $n-1$ вложений "по часовой стрелке". При вложении k "по часовой стрелке", где $1\le k\le n-1$, четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H-v_{i-1}-(w,v_i)$ должно выполняться $1=b^0_{i-1}(M)=b^0_{i-1+k}(F)=b^0_{i-1+k}(M)=b^0_{i-1+2k}(F)=b^0_{i-1+2k}(M)=\cdots=b^0_{i-1+lk}(F)=b^0_{i-1+lk}(M)$, где $l=1,2,3,\cdots$, так как $b_j=b_{j+k}$, где $0\le j\le n-1, j\neq i-k-1, i-k$, по условию теоремы 2 для всех вложений "по часовой стрелке". При $l=2n$ получаем, что $1=b^0_{i-1}(M)=\cdots=b^0_{i-1+2nl}(F)=b^0_{i-1+2nl}(M)=b^0_{i-1}(M)=0$, то есть приходим к противоречию. В силу произвольного выбора значения k, получаем, что ни одно из n вложений "по часовой стрелке" многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H-v_{i-1}-(w,v_i)$ не выполняется.

Осталось показать, что ни одно из вложений "против часовой стрелки" четного многоугольного орграфа M в максимальный подграф $H-v_{i-1}-(w,v_i)$ не выполняется. Данный факт доказывает аналогично вышеописанному случаю вложения в максимальный подграф $H-v_{i+1}-(v_i,w)$, в силу того, что количество нулей и единиц в соответствующем булевом векторе остается таким же. ■

Пример. Для наглядности рассмотрим ТНР для четного многоугольного орграфа M, изображенного на рис. 1, $b(M)=0001$. Орграф H, изображенный на рис. 5, построенный по рецепту теоремы 3, будет являться ТНР для четного многоугольного орграфа M, изображенного на рис. 1.

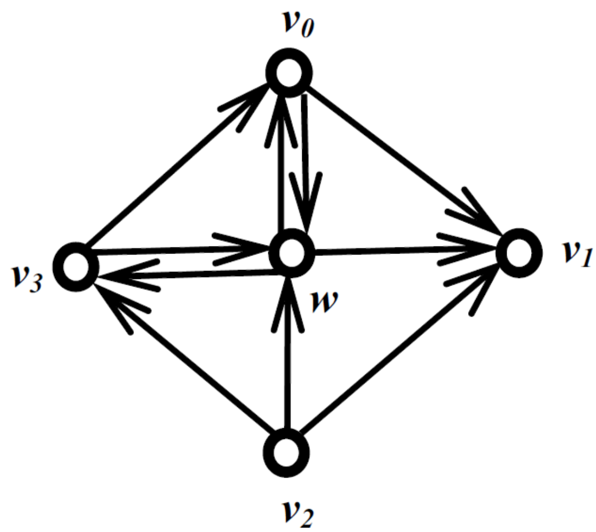

Рис. 5. ТНР для многоугольный орграфа M по рецепту теоремы 3

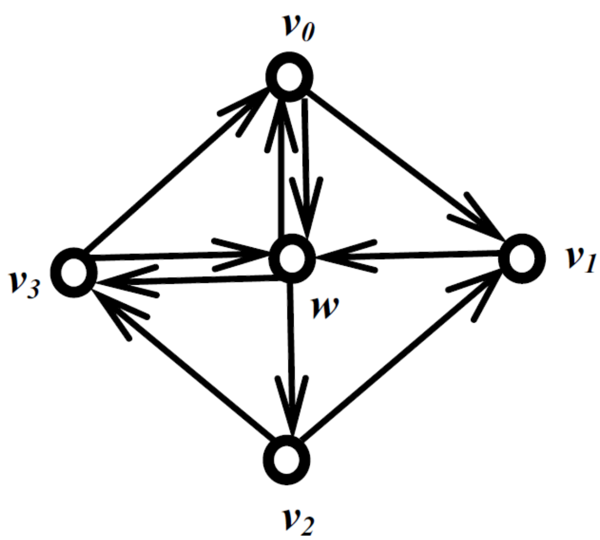

Рис. 6. Альтернативный ТНР для многоугольного орграфа M

ТНР для некоторого четного многоугольного орграфа, построенное по рецепту теоремы 3, является не единственным ТНР для этого четного многоугольного орграфа в общем случае. Для четного многоугольного орграфа M, изображенного на рис. 1, существует еще одно ТНР, изображенное на рис. 6. Легко понять, что оно не изоморфно ТНР, построенному по теореме 3 и изображенному на рис. 5, так как в нем нет источников и стоков, а в ТНР на рис. 6, вершина v_2 является источником, а вершина v_1 — стоком.

Т-неприводимые расширения для многоугольных орграфов

Далее будет рассмотрен полиномиальный алгоритм построения ТНР для многоугольных орграфов, как четных, так и не четных, имеющий асимптотическую сложность $O(n^3)$ (см. [A11]).

Алгоритм 1. Дан многоугольный орграф $M = (Z, \gamma)$. Построим его ТНР следующим образом:

1. Добавим к M вершину w;

2. Для каждой вершины $v \in Z$ добавим дуги следующим образом:

— если $v \in Z$ является источником, то добавим дугу (v, w);

— если $v \in Z$ является стоком, то добавим дугу (w, v);

— если $v \in Z$, такая что $d^+(v) = 1$ и $d^-(v) = 1$, то добавим дуги (v, w) и (w, v).

Орграф, построенный после вышеописанных пунктов, обозначим через $H_0 = (W, \beta_0)$. Положим $k = 0$;

Если $n \equiv 0 \pmod 2$, то есть многоугольный орграф M является четным, то завершаем работу алгоритма, так как построенный орграф H_0 является искомым ТНР. Иначе, в случае $n \equiv 1 \pmod 2$, переходим к следующему пункту алгоритма.

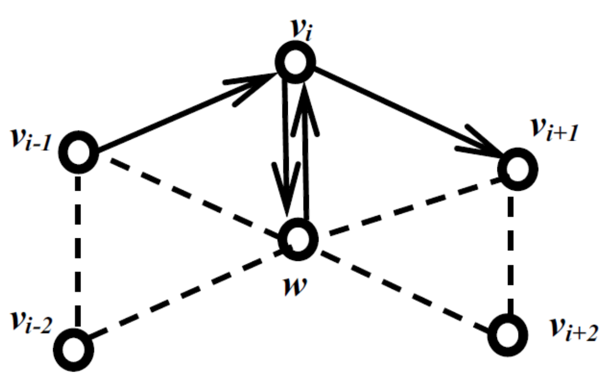

Рис. 7. Иллюстрация п. 3 алгоритма 1

3. Рассматриваем вершины v_i, имеющие степень исхода и степень захода, равные 1, $d^+(v_i) = 1$ и $d^-(v_i) = 1$, в многоугольном орграфе M, в порядке возрастания их индексов.

Пусть, для определенности, вершины пронумерованы таким образом, что если рассматриваемая вершина $v_i \in Z$ в пункте 3 имеет степень исхода и степень захода, равные 1, то $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$ и $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$ (рис. 7). Также, по построению в пункте 2 алгоритма 1, вершина v_i соединена с вершиной w дугами (v_i, w) и (w, v_i). Возможны следующие случаи.

Случай A: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой что $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (w, v_i)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай B: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой что $H_{k+1} = H_k - (v, w)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (v_i, w)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай C: многоугольный орграф M не вкладывается ни в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$, ни в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Не производим никаких действий, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Каким способом вычислительно быстро за полиномиальное время проверить вложение многоугольного орграфа M в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ или в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$, подробно описано ниже.

После того, как все вершины рассмотрены, алгоритм 1 завершает свою работу. Построенный орграф H_k из орграфа H_0, где k — это количество дуг, удаленных в пункте 3 алгоритма 1, является ТНР для многоугольного орграфа M.

Проверка вложения многоугольного орграфа M в один из подграфов орграфов $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ или $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ осуществляется следующим образом. Как было сказано выше, $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$ и $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$ и по построению в пункте 2 алгоритм 1, вершина v_i соединена с вершиной w дугами (v_i, w) и (w, v_i). Данная ситуация представлена на рис. 7. На нем изображены вершина v_i, такая что $d^+(v_i) = 1$ и $d^-(v_i) = 1$ в многоугольном орграфе M, вершины v_{i-1} и v_{i+1}, смежные с вершиной v, а также вершина v_{i-2} смежная с вершиной v_{i-1} и вершина v_{i+2}, смежная с вершиной v_{i+1}. Пунктирная линия на рис. 7, соединяющая две вершины, означает, что между ними может быть как одна дуга в любом из направлений, так и две дуги, если одна из инцидентных вершин является вершиной w. Если многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$, то в орграфе $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ должна быть часть F, изоморфная многоугольному орграфу M. Такая часть F в орграфе $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ может быть образована одной из дуг между вершинами v_{i-2} и w, дугой (v_i, w), дугой (v_i, v_{i+1}), дугой между вершинами v_{i+1} и v_{i+2} и остальными дугами многоугольного орграфа M между парами еще не рассмотренных вершин. В зависимости от того, одна или две дуги были добавлены между вершинами v_{i-2} и w, надо проверить одну или две части орграфа $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ на изоморфизм многоугольному орграфу M.

Часть F орграфа $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$, сама являющаяся многоугольным орграфом, будет изоморфна многоугольному орграфу M тогда и только тогда, когда $b(F) = b(M)$. Построение двоичного кода для многоугольного орграфа осуществляется за время $2n^2 = O(n^2)$ путем выбора лексикографически наименьшего двоичного вектора из $2n$ кандидатов. Таким образом проверка вложения многоугольного орграфа M и орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ осуществляется за время $O(n^2)$.

Такая же логика используется при проверке вложения многоугольного орграфа M в один из подграфов $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Если многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$, то в орграфе $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ должна быть часть F, изоморфная многоугольному орграфу M. Такая часть F в орграфе $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ может быть образована одной дугой между вершинами v_{i+2} и w, дугой (w, v_i), дугой (v_{i-1}, v_i), дугой между вершинами v_{i-2} и v_{i-1} и остальными дугами многоугольного орграфа M между парами еще не рассмотренных вершин. В зависимости от того, одна или две дуги были добавлены между вершинами v_{i+2} и w, надо проверить одну или две части орграфа $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ на изоморфизм многоугольному орграфу M.

Аналогично, будет достаточно проверить изоморфизм многоугольного орграфа M и одной или двух частей орграфа $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$, являющихся многоугольными орграфами, в зависимости от количества добавленных дуг между вершинами v_{i+2} и w.

Пример. Рассмотрим работу алгоритма 1 для многоугольного орграфа M, изображенного на рис. 8, $b(M) = 00011$.

После применения пунктов 1 и 2 алгоритма 1, получим орграф $H_0 = (W, \beta_0)$, изображенный на рис. 9.

В пункте 3 алгоритма 1 будет удалено две дуги из орграфа H_0: дуга (v_1, w) и дуга (w, v_2). При рассмотрении вершины v_0 удаляется дуга (v_1, w), так как многоугольный орграф M изоморфен части $(Z + w - v_0, \{(w, v_1), (v_4, w), (v_3, v_4), (v_3, v_2), (v_2, v_1)\})$ орграфа $H_0 - v_0 - (v_1, w)$. Далее строим орграф $H_1 = H_0 - (v_1, w)$ и алгоритм 1 продолжает работу с ним. При рассмотрении вершины v_3 удаляется дуга (w, v_2), так как многоугольный орграф M изоморфен части $(Z + w - v_3, \{(v_4, v_0), (w, v_4), (v_2, w), (v_2, v_1), (v_1, v_0)\})$ орграфа $H_1 - v_3 - (w, v_2)$. Далее строим орграф $H_2 = H_1 - (w, v_2)$. Из орграфа H_2 уже нельзя удалить никакую дугу без потери свойства расширения.

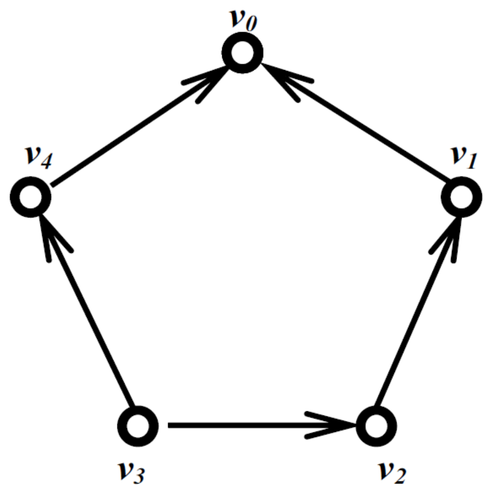

Рис. 8. Многоугольный орграф M, $b(M) = 00011$

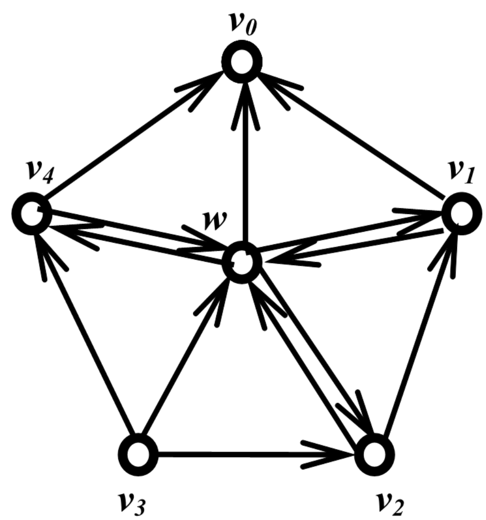

Рис. 9. Орграф $H_0 = (W, \beta_0)$

После работы алгоритма 1 получим орграф $H_2 = (W, \beta_2)$, изображенный на рис. 10, являющийся ТНР для многоугольного орграфа M.

Асимптотическая сложность алгоритма 1. Оценим асимптотическую сложность алгоритма 1. Время выполнения пункта 2 алгоритма 1 равно $O(n)$, так как в нем анализируется степень исхода и степень захода каждой вершины $v_i \in Z$ многоугольного орграфа $M = (Z, \gamma)$ порядка n. Для реализации пункта 3 для каждой вершины $v_i \in Z$, не являющейся ни источником, ни стоком, необходимо произвести одну или две проверки многоугольных орграфов на изоморфизм. Изоморфизм многоугольных орграфов устанавливается через анализ их двоичных кодов. Асимптотическая сложность проверки изоморфизма для данного типа орграфов равна $O(n^2)$, так как необходимо из $2n = O(n)$ двоичных векторов многоугольного орграфа выбрать лексикографически минимальный. Так как такую проверку необходимо произвести для не более чем $O(n)$ вершин, то асимптотическая сложность выполнения пункта 3 оценивается, как $O(n^3)$.

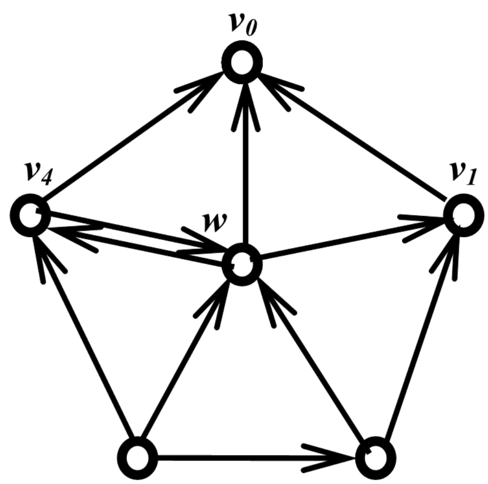

Рис. 10. ТНР для многоугольного орграфа M

В итоге, асимптотическая сложность алгоритма 1 составляет $O(n^3)$ для нечетных многоугольных орграфов и $O(n)$ для четных многоугольных орграфов.

Теорема 4. *Алгоритм 1 корректен.*

Доказательство. Рассмотрим орграф $H_k = (W, \beta_k)$, полученный после выполнения алгоритма. Для доказательства корректности предложенного алгоритма необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы -5 (критерия ТНР для орграфов).

1. $|W| = |Z| + 1$, так как $Z = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}, W = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}, w\}$.

2. Очевидно, что $M \cong H_k - w$ в силу построения в алгоритме.

3. После пункта 2, орграф H_0 является расширением для многоугольного орграфа M. Действительно, при вложении $\phi : Z \to (W - v_i)$ многоугольного орграфа M в некоторый максимальный подграф $H_0 - v_i$ орграфа H_0, полученный удалением вершины v_i, вершину v_i отобразим в вершину w, $\phi(v_i) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

Для четных многоугольных орграфов на этом шаге алгоритма 1 ТНР уже получено, так как построения в пунктах 1 и 2 алгоритма 1 эквивалентны построениям теоремы 3. По этой причине если многоугольный орграф M является четным, то на этом шаге алгоритм 1 завершает свою работу.

Покажем, что в течение выполнения пункта 3 каждый орграф $H_k = (W, \beta_k)$ остается расширением для многоугольного орграфа M. Если вершина v_i рассматривается в пункте 3 алгоритма 1, то в орграфе H_k присутствуют встречные дуги $(v_i, w) \in \beta_k$ и $(w, v_i) \in \beta_k$ по построению в пункте 2, и в многоугольном орграфе M будет $d^+(v_i) = 1$ и $d^-(v_i) = 1$, так как $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$ и $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$. Дуга (w, v_i) используется только при вложении $\phi : Z \to (W - v_{i-1})$ многоугольного орграфа M в орграф $H_k - v_{i-1}$, при котором v_i отображается в вершину w, $\phi(u) = w$, а остальные вершины отображаются сами в себя. При этом (w, v_i) не используется при вложении $\phi : Z \to (W - v_j)$ многоугольного орграфа M в любой другой максимальный подграф $H_k - v_j$, где $v_j \in W, j \neq i - 1$. То есть, при удалении дуги (w, v_i) многоугольный орграф M будет гарантированно вкладываться в каждой орграф $H_k - v_j - (w, v_i)$, где $v_j \in W, j \neq i - 1$. При этом в пункте 3 алгоритма 1 дуга (w, v_i) удаляется тогда и только тогда, когда многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ (Случай А). Но если многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ и вкладывается в каждой орграф $H_k - v_j - (w, v_i)$, где $v_j \in W, j \neq i - 1$, то орграф $H_k - (w, v_i)$ является расширением многоугольного орграфа M.

Именно в этом случае в пункте 3 алгоритма 1 дуга (w, v_i) удаляется из орграфа H_k, после чего алгоритм 1 продолжает работу с орграфом $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$.

Аналогично, дуга (v_i, w) используется только при вложении $\phi : Z \to (W - v_{i+1})$ многоугольного орграфа M в орграф $H_k - v_{i+1}$. При этом, она не используется при вложении $\phi : Z \to (W - v_j)$ многоугольного орграфа M в любой максимальный подграф $H_k - v_j$, где $v_j \in W, j \neq i+1$. То есть, при удалении дуги (v_i, w) многоугольный орграф M будет гарантированно вкладываться в каждый орграф $H_k - v_j - (v_i, w)$, где $v_j \in W, j \neq i+1$. При этом в пункте 3 алгоритма 1 дуга (v_i, w) удаляется тогда и только тогда, когда многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ (Случай B). Но если многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ и вкладывается в каждой орграф $H_k - v_j - (v_i, w)$, где $v_j \in W, j \neq i+1$, то орграф $H_k - (v_i, w)$ является расширением многоугольного орграфа M. Именно в этом случае в пункте 3 алгоритма 1 дуга (v_i, w) удаляется из орграфа H_k, после чего алгоритм 1 продолжает работу с орграфом $H_{k+1} = H_k - (v_i, w)$.

4. (свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине w, из орграфа $H_k = (W, \beta_k)$, полученный орграф не будет расширением для орграфа $M = (Z, \gamma)$. Если из орграфа H_k удалить дугу (v_i, w), добавленную в пункте 2 из источника v_i в вершину w, то в максимальной подграфе $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$ и в максимальной подграфе $H_k - v_{i-1} - (v_i, w)$ орграфа $H_k - (v_i, w)$ вершина v_i будет изолированной. Если из орграфа H_k удалить дугу (w, v_i), добавленную в пункте 2 из вершины w в сток v_i, то в орграфе $H_k - v_{i+1} - (w, v_i)$ и в орграфе $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$ вершина v_i будет изолированной. Покажем, что из орграфа H_k также нельзя удалить никакую дугу, инцидентную вершине v, которая не является ни источником, ни стоком в многоугольном орграфе M. Доказательство проведем методом от противного. Пусть при удалении какой-то либо дуги, инцидентной вершине v_i, которая не является ни источником, ни стоком в многоугольном орграфе M, из орграфа H_k, полученный орграф будет расширением для многоугольного орграфа M. В таком случае данная дуга должна была быть удалена в пункте 3 в течение работы алгоритма 1. Получили противоречие.

Свойство неприводимости доказано. ■

В ТНР H для многоугольного орграфа M порядка n может быть от n до $2n$ добавленных дуг, т. е. дуг, инцидентных вершине w. Предложенный алгоритм позволяет описать семейства многоугольных орграфов, на которых достигается верхняя и нижняя оценка количества добавленных дуг, где под верхней оценкой подразумевается $2n$ добавленных дуг, а под нижней — n добавленных дуг.

Теорема 5. *Из многоугольных орграфов контуры и только они, имеют ТНР, содержащие $2n$ добавленных дуг.*

Доказательство. Докажем, что контуры имеют $2n$ добавленных дуг в ТНР. Рассмотрим произвольный контур $C_n = (V, \alpha)$ порядка n, тогда орграф $H = (V \cup \{w\}, \beta)$, такой что $H \cong \mathrm{TP}(C_n)$, получается из контура C_n добавлением $2n$ добавленных дуг, инцидентных вершине w.

Докажем, что орграф $H \cong \mathrm{TP}(C_n)$ является ТНР для контура $C_n = (V, \alpha)$ порядка n. Чтобы доказать это, необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы -5 (критерия ТНР для орграфов).

Очевидно, что первые три пункта теоремы -5 выполняются для тривиальных расширений.

Докажем свойство неприводимости. Пусть некоторой дуги $(v_i, w) \in \beta$, $0 \leq i \leq n-1$, входящей в вершину w, нет в орграфе H. Рассмотрим максимальный подграф $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ орграфа $H - (v_i, w)$, такой что $H - (v_i, w) \cong \mathrm{TP}(C_n) - (v_i, w)$. В подграфе $H - v_{i+1} - (v_i, w)$ получаем, что $d^+(v_i) = 0$, в то время как степень исхода каждой вершины контура C_n равна 1, $(\forall v \in V)(d^+(v) = 1)$. Следовательно, контур C_n не вкладывается в один из максимальных подграфов орграфа $H-(v_i, w)$. В силу произвольности выбора дуги $(v_i, w) \in \beta$, входящей в вершину w, получаем, что каждая дуга, входящая в вершину w, должна присутствовать в ТНР для контура C_n.

Пусть некоторой дуги $(w, v_i) \in \beta$, $0 \leq i \leq n-1$, выходящей из вершины w, нет в орграфе H. Рассмотрим максимальный подграф $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ орграфа $H - (w, v_i)$, такой что $H - (w, v_i) \cong$ТР$(C_n) - (w, v_i)$. В подграфе $H - v_{i-1} - (w, v_i)$ получаем, что $d^-(v_i) = 0$, в то время как степень захода каждой вершины контура C_n равна 1, $(\forall v \in V)(d^-(v) = 1)$. Следовательно, контур C_n не вкладывается в один из максимальных подграфов орграфа $H - (w, v_i)$. В силу произвольности выбора дуги $(w, v_i) \in \beta$, выходящей из вершины w, получаем, что каждая дуга, выходящая из вершины w, должна присутствовать в ТНР для контура C_n.

Свойство неприводимости доказано.

Докажем теперь, что контуры порядка n являются единственными многоугольными орграфами, в ТНР которых существует $2n$ добавленных дуг. Действительно, если многоугольный орграф M порядка n не является контуром, то в нем существует хотя бы одна вершина v, являющая либо источником, либо стоком. Тогда по схеме алгоритма у него будет существовать ТНР, в котором меньше, чем $2n$ дуг, так как в пункте 2 между вершиной v и w будет добавлена только одна дуга.

Таким образом доказано, что из многоугольных орграфов контуры и только они, имеют ТНР, содержащие $2n$ добавленных дуг. ■

Следующая теорема показывает общий вид многоугольных орграфов, в ТНР которых содержится n добавленных дуг, то есть минимально возможное количество.

Теорема 6. *Многоугольные орграфы порядка n, где n - четное, с двоичным кодом вида* 0101..01*, имеют ТНР, содержащие n добавленных дуг.*

Доказательство. Каждая вершина многоугольных орграфов с двоичным кодом вида 0101..01 является либо источником, либо стоком. Следовательно, по схеме алгоритма 1 в пункте 2, для таких орграфов будет добавлено ровно n дуг, и впоследствии ни одна из n добавленных дуг не будет удалена. ■

Общие сведения о сверхстройных деревьях

Неориентированный граф (или, для краткости, граф) — пара $G = (V, \alpha)$, где α – симметричное и антирефлексивое отношение на множестве V (ребра графа). *Путь* в графе — последовательность ребер вида (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\cdots$, (v_{n-2}, v_{n-1}), где $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$, $0 \leq i \leq n-2$, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом, оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним ребер пути. *Длина пути* — это количество входящих в него ребер. Путь называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит не более чем двум его ребрам. Простой путь в графе из n вершин, у которого начальная и конечная вершины не совпадают, является *цепью* и обозначается через P_n. *Путь* является циклическим, если $v_0 = v_{n-1}$. *Цикл* в графе — это простой циклический путь. В неориентированном графе $d^+(v) = d^-(v) =: d(v)$. Число $d(v)$ называется степенью вершины v. При этом вершина называется четной или нечетной в зависимости от соответствующего свойства числа $d(v)$.

Граф называется *связным*, если каждая пара его вершин соединена каким-либо путем. *Дерево* — связный граф без циклов. Дерево, в котором только одна вершина имеет степень больше 2, называется *сверхстройным* (или *звездоподобным*). На сверхстройное дерево можно смотреть как на объединение k цепей P^0, P^1, $\cdots$, P^{k-1}, где $k > 2$, с общей концевой вершиной. При этом сверхстройное дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке неубывания: $(n_0, n_1, \cdots, n_{k-1})$, где $n_0 \le n_1 \le \cdots \le n_{k-1}$. Такое кодирование сверхстройных деревьев является взаимно однозначным. Любому вектору $(n_0, n_1, \cdots, n_{k-1})$, где $k > 2$, будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройной дерево с числом вершим $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1} + 1$, являющееся объединением k цепей P_{n_0}, P_{n_1}, $\cdots$, $P_{n_{k-1}}$ с общей концевой вершиной. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k, k вершин будут иметь степень 1, а остальные $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1} - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Корневую вершину в сверхстройном дереве обозначим через v_0. Вершины, в количестве n_i штук, принадлежащие i-ой цепи P^i, $0 \le i \le k-1$, обозначим через $v_{i,j}$, $1 \le j \le n_i - 1$, где индекс j соответствует расстоянию вершины $v_{i,j}$ от концевой вершины v_0.

На рис. 11 изображено сверхстройное дерево с 10 вершинами, являющееся объединением трех цепей с общей концевой вершиной: P_3, P_4 и P_5. Это дерево имеет вектор цепей $(3, 4, 5)$.

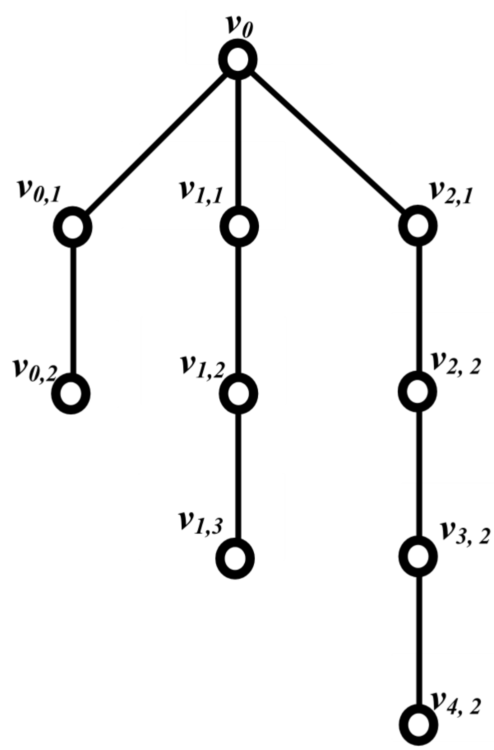

Рис. 11. Сверхстройное дерево с вектором цепей $(3, 4, 5)$.

ТНР для выходящих сверхстройных деревьев

Под *выходящим сверхстройным деревом* будем понимать ориентацию сверхстройного дерева, при которой каждое ребро ориентируется в направлении от корневой вершины v_0 к листьям: ребра $(v_0, v_{i,1})$, $0 \le i \le k-1$, будут ориентированы от вершины v_0 до вершины $v_{i,1}$, ребра $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$, $0 \le i \le k-1$, $0 \le j \le n_i - 2$, от вершины $v_{i,j}$ к вершине $v_{i,j+1}$. Вершина v называется *источником*, если ее степень захода равна 0, $d^-(v) = 0$. Вершина v называется *стоком*, если ее степень исхода равна 0, $d^+(v) = 0$. В выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$, являющегося объединением k ориентированных цепей, корневая вершина v_0 является источником, имеет степень исхода, равную k, $d^+(v_0) = k$, и k вершин v_{i,n_i-1}, где $0 \le i \le k-1$ являются стоками.

На рис. 12 изображено выходящее сверхстройное дерево, получающееся ориентацией сверхстройного дерева, изображенного на рис. 11, являющегося объединением трех цепей с общей концевой вершиной: P_3, P_4 и P_5.

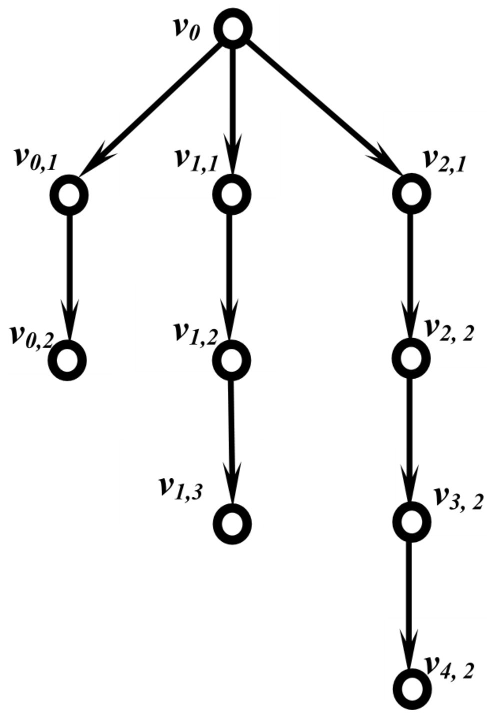

Рис. 12. Выходящее сверхстройное дерево $(3, 4, 5)$.

Следующия теорема позволяет построить одно из ТНР для выходящих сверхстройных деревьев.

Теорема 7 (одно из ТНР для выходящих сверхстройных деревьев).

Пусть $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ — некоторое выходящие сверхстройное дерево, являющееся объединением k цепей $\overrightarrow{P}_{n_0}$, $\overrightarrow{P}_{n_1}$, $\cdots$, $\overrightarrow{P}_{n_{k-1}}$. Его ТНР $\overrightarrow{H} = (V \cup \{w\}, \beta)$ получается добавлением в выходящее сверхстройное дерево $\overrightarrow{T}$ вершины w и следующих дуг:

1. Добавляем дугу (v_0, w) из корневой вершины v_0 в вершину w;

2. Добавляем дуги (w, v_{i,n_i-2}) из вершины w в каждую вершину v_{i,n_i-2}, где $0 \le i \le k-1$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$, имеющей более двух вершин, т. е. $n_i > 2$; добавляем дуги (w, v_{i,n_i-1}) из вершины w в каждый сток v_{i,n_i-1}, где $0 \le i \le k-1$, который является листом в исходном выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$.

3. Добавляем встречные дуги $(w, v_{i,j})$, $(v_{i,j}, w)$ для каждой вершины $v_{i,j}$, где $0 \le i \le k-1, 1 \le j \le n_i - 3$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$, имеющей более трех вершин, т. е. $n_i > 3$;

Доказательство.

Рассмотрим орграф $\overrightarrow{H} = (V \cup \{w\}, \beta)$. Для доказательства корректности предложенной конструкции необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 1 (критерий ТНР для ориентированных графов):

1. $|W| = |V|+1$, так как $V = \{v_0, v_{0,1}, v_{0,2}, \cdots, v_{0,n_0-1}, \cdots, v_{k-1,1}, v_{k-1,2}, \cdots, v_{k-1,n_{k-1}-1}\}$, $W = \{v_0, v_{0,1}, v_{0,2}, \cdots, v_{0,n_0-1}, \cdots, v_{k-1,1}, v_{k-1,2}, \cdots, v_{k-1,n_{k-1}-1}, w\}$.

2. $\overrightarrow{T} \cong \overrightarrow{H} - w$ в силу построения в теореме.

3. Покажем, что выходящее сверхстройное дерево $\overrightarrow{T}$ вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа $\overrightarrow{H}$.

При вложении $\phi : V \to W - v_0$ выходящего сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в максимальный подграф $\overrightarrow{H} - v_0$ орграфа $\overrightarrow{H}$, полученный удалением корневой вершины v_0, корневую вершину v_0 отобразим в вершину w, $\phi(v_0) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

При вложении $\phi : V \to W - v_{i,j}$, $j \neq n_i - 1$ выходящего сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в максимальный подграф $\overrightarrow{H} - v_{i,j}$ орграфа $\overrightarrow{H}$, полученный удалением некоторой вершины $v_{i,j}$, не являющейся стоком, вершину $v_{i,j}$ отобразим в вершину w, $\phi(v_{i,j}) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя.

При вложении $\phi : V \to W - v_{i,j}$, $j \neq n_i - 1$ выходящего сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в максимальный подграф $\overrightarrow{H} - v_{i,j}$ орграфа $\overrightarrow{H}$, полученный удалением стока v_{i,n_i-1} цепи $\overrightarrow{P}_{n_2}$ длины один, состоящей из двух вершин, вершину $v_{i,1}$ отобразим в вершину w, $\phi(v_{i,1}) = w$, а остальные вершины отобразим сами в себя. Такое отображение возможно, так как в орграфе $\overrightarrow{H}$ существуют дуга (v_0, w) по построению. Следовательно, дуга $(v_0, v_{i,1})$, которая образует цепь $\overrightarrow{P}_{n_2}$, отобразиться в дугу (v_0, w).

При вложении $\phi : V \to W - v_{i,n_i-1}$ выходящего сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в максимальный подграф $\overrightarrow{H} - v_{i,n_i-1}$ орграфа $\overrightarrow{H}$, полученный удалением стока v_{i,n_i-1} цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более одного, состоящей более чем из двух вершин, $n_i > 2$, вершины v_0, $v_{i,1}$, $v_{i,2}$, $\cdots$, v_{i,n_i-2}, v_{i,n_i-1} цепи $\overrightarrow{P}_{n_j}$ отобразим в вершины v_0, w, $v_{i,1}$, $v_{i,2}$, $\cdots$, v_{i,n_i-3}, v_{i,n_i-2}, а остальные вершины отобразим сами в себя.

Таким образом, выходящие сверхстройное дерево $\overrightarrow{T}$ вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа $\overrightarrow{H}$.

4. (свойство неприводимости). Докажем, что при удалении любой дуги, инцидентной вершине w, из орграфа $\overrightarrow{H} = (W, \beta)$, полученный орграф не будет расширением для выходящего сверхстройного дерева $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$.

При удалении дуги (v_0, w) в каждом из k максимальных подграфов $\overrightarrow{H} - (v_0, w) - v_{i,1}$ орграфа $\overrightarrow{H} - (v_0, w)$, где $0 \leq i \leq k - 1$, будет единственный источник v_0, со степенью исхода, равной $k-1$. При этом, в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$ корневая вершина v_0, являющаяся в нем единственным источником, имеет степень исхода, равную k. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в некоторые максимальные подграфы орграфа $\overrightarrow{H} - (v_0, w)$ невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,1})$, где $0 \leq i \leq k - 1$, входящей в вершину $v_{i,1}$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более одного, состоящей более чем из двух вершин, в максимальном подграфе $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1}) - v_0$ орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1})$ будет единственный источник $v_{i,1}$, со степенью исхода, меньше или равной 2. При этом, в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$ корневая вершина v_0, являющаяся в нем единственным источником, имеет степень исхода, большую 2, так как $k > 2$. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в некоторые максимальные подграфы орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1})$, где $0 \leq i \leq k - 1$, $n_i > 2$ невозможно.

При удалении дуги $(v_{i,1}, w)$, где $0 \leq i \leq k - 1$, выходящей из вершины $v_{i,1}$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более двух, состоящей более чем из трех вершин, в максимальном подграфе $\overrightarrow{H} - (v_{i,1}, w) - v_{i,2}$ орграфа $\overrightarrow{H} - (v_{i,1}, w)$ будет $k+1$ сток. Это k вершин v_{j,n_j-1}, где

$0 \le j \le k-1$, которые являются стоками в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$, и вершина $v_{i,1}$, так как дуга $(v_{i,1}, w)$ была удалена. При этом, в дереве $\overrightarrow{T}$ есть только k вершин-стоков, которые являются листьями дерева. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в один из максимальных подграфов орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1})$ невозможно.

При удалении дуги $(v_{i,j}, w)$, где $0 \le i \le k-1$, $2 \le j \le n_i - 3$, выходящей из вершина $v_{i,j}$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более трех, состоящей более чем из четырех вершин, в максимальном подграфе $\overrightarrow{H} - (v_{i,j}, w) - v_{i,j+1}$ орграфа $\overrightarrow{H} - (v_{i,j}, w)$ будет $k+1$ сток. Это k вершин v_{j,n_j-1}, где $0 \le j \le k-1$, которые являются стоками в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$, и вершина $v_{i,j}$, так как дуга $(v_{i,j}, w)$ была удалена. При этом, в дереве $\overrightarrow{T}$ есть только k вершин-стоков, которые являются листьями дерева. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в один из максимальных подграфов орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,j})$, где $0 \le i \le k-1$, $2 \le j \le n_i - 3$, $n_i > 4$ невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,j})$, где $0 \le i \le k-1$, $2 \le j \le n_i - 2$, входящей в вершина $v_{i,j}$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более трех, состоящей более чем из четырех вершин, в максимальном подграфе $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,j}) - v_{i,j-1}$ орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,j})$ будет единственный источник $v_{i,j}$, со степенью исхода, меньше или равной 2. При этом, в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$ корневая вершина v_0, являющаяся в нем единственным источником, имеет степень исхода, большую 2, так как $k > 2$. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в один из максимальных подграфов орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,j})$, где $0 \le i \le k-1$, $2 \le j \le n_i - 3$, $n_i > 4$ невозможно.

При удалении дуги $(w, v_{i,1})$, где $0 \le i \le k-1$, входящей в сток $v_{i,1}$, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_2}$ длины один, состоящей из двух вершин, в максимальном подграфе $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1}) - v_0$ орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1})$ вершина $v_{i,1}$ будет изолированной. При этом, в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$ нет изолированных вершин. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в один из максимальных подграфов орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,1})$, где $0 \le i \le k-1$, $n_i = 2$ невозможно.

При удалении дуги (w, v_{i,n_i-1}), где $0 \le i \le k-1$, входящей в сток v_{i,n_i-1}, которая принадлежит цепи $\overrightarrow{P}_{n_i}$ длины более одного, состоящей более чем из двух вершин, в максимальной подграфе $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,n_i-1}) - v_{i,n_i-2}$ орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,n_i-1})$ вершина v_{i,n_i-1} будет изолированной. При этом, в выходящем сверхстройном дереве $\overrightarrow{T}$ нет изолированных вершин. Следовательно, вложение сверхстройного дерева $\overrightarrow{T}$ в один из максимальных подграфов орграфа $\overrightarrow{H} - (w, v_{i,n_i-1})$, где $0 \le i \le k-1$, $n_i > 2$ невозможно. ■

Литература

1. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 326 с.

2. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов. Теоретические проблемы информатики и ее приложений: Сб. науч. тр. // Под ред. проф. А. А. Сытника. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2004. С. – 113–125.

3. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения полных бинарных деревьев // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. – 2005. №14, – С. 158-160.

4. *Салий В.Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. – 2003. №6. – С. 63-65.

5. *Абросимов М.Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов. // Изд-во Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2006. – Т. 6, вып. 1/2. – С. 86-91.

6. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing systems. // IEEE transaction on computers. — 1976. — Vol. C-26. — № 9. — P. 875-884.

7. *Абросимов М.Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88. – № 5. – С.643-650.

8. *Салий В.Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа. // Известия Сарат. гос. ун-та. – 2013. – Т.13, вып. 2. – С. 44-51.