

Вычисление класса дифференциальной формы спроса по дискретным данным

А. Шананин^{1,2}, С. Тарасов¹

Московский физико-технический институт (государственный университет)¹

ФИЦ ИУ РАН, ВЦ РАН им. А.А.Дородницына²

В математической экономике уже более ста лет изучается вопрос об рационализируемости функций спроса. Функциями спроса называется зависимость объемов покупок товаров от цен на них, а под рационализируемостью понимается, что функции спроса могут быть получены как результат максимизации функции полезности при бюджетном ограничении. В гладкой категории для рационализируемости необходимо, чтобы построенная по функциям спроса дифференциальная форма удовлетворяла условиям интегрируемости типа Фробениуса [1]. В свою очередь, условия Фробениуса можно переформулировать в терминах сильной аксиомы теории выявленного предпочтения, а последняя, в силу известной теоремы Африата, допускает проверку на дискретной торговой статистике, которую составляют значения функций спроса в заданных точках [2]. Таким образом, теорема Африата является не только дискретным критерием интегрируемости, но и позволяет построить эффективный алгоритм проверки интегрируемости. В то же время, численные эксперименты показывают, что сильная аксиома, а следовательно, и рационализируемость может нарушаться. В гладкой категории неинтегрируемость можно проинтерпретировать в терминах класса дифференциальной формы спроса [1], т. е. минимального числа (агрегированных) переменных, к которому форма может быть приведена. Можно предположить, что класс формы спроса связан с числом одновременно существующих предпочтений и/или укладов, различие между которыми слабо проявляются в стабильной ситуации, но становится существенным в период кризисов и крупных структурных перестроек. В последние годы группа исследователей провела масштабные исследования дискретных постановок проблемы рационализируемости при нарушении сильной аксиомы [3]. В частности, была предложена естественная формулировка дискретного аналога класса формы спроса для неоднородной аксиомы выявленного предпочтения, и показано, что соответствующая задача вычисления класса формы спроса сводится к задаче ЦЛП, что дает экспоненциальный алгоритм вычисления класса. Отметим два момента. Те же авторы показали NP-трудность задачи вычисления класса в этой и близкой постановках [4]. Таким образом, какие-то количественные выводы могут быть сделаны лишь для очень

небольших статистик. Кроме того, аналогичная формулировка дискретного класса формы спроса для однородной сильной аксиомы сводится к системе алгебраических уравнений, и, по-видимому, существенно сложнее, чем задача для неоднородного случая. В то же время, численные эксперименты на реальных статистиках, проведенные Н. Клемашевым [5], убедили нас, что использование однородной сильной аксиомы имеет неоспоримое преимущество. В данной работе предлагается другая эффективная естественная формализация дискретного аналога класса формы, применимая и для однородного случая. А именно, стартуя с соответствующей (вообще говоря, несовместной) системы Африата, мы предлагаем рассмотреть решение с минимальной невязкой, которое естественно распадается на непересекающиеся по ребрам циклы в графе предпочтения. Решение, таким образом, сводится к задаче об оптимальной взвешенной циркуляции, т. е. задаче поиска максимального потока минимальной стоимости. Для однородной сильной аксиомы получаем задачу ЛП: $\min \sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^T \omega_{t\tau}$ при $\omega_{t\tau} \geq c_{t\tau} - \lambda_t + \lambda_{\tau}; \omega_{t\tau} \geq 0 (t, \tau = 1, \dots, T)$. Двойственная задача является задачей о циркуляции максимальной стоимости: $\min \sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^T c_{t\tau} x_{t\tau}$ при условиях: $\sum_{t=1}^T x_{t\tau} = \sum_{\tau=1}^T x_{t\tau}; 1 \geq x_{t\tau} \geq 0 (t, \tau = 1, \dots, T)$.

Теорема. Оптимальное решение двойственной задачи достигается на системе дизъюнктивных по ребрам циклов и может быть найдено произвольным алгоритмом определения максимального потока минимальной стоимости.

Естественно, подход применим и для неоднородной аксиомы.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-07-00075.

Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-00641.

Литература:

1. *Petrov A., Shaninin A.* Integrability conditions, income distribution, and social structures. Lecture notes in economics and mathematics systems. V. 453- Springer. - 1997. - P. 271-288.
2. *Afriat S.* The construction of utility functions from expenditure data. - International Economic Review – 1967-V. 8 - P. 66--77.
3. *Cherchye L. et al.* The collective model of household consumption: a nonparametric characterization. – Econometrica – V. 75 – P. 553—574.
4. *Cherchye L. et al.* Nonparametric tests of collectively rational consumption behavior: an integer programming procedure. - Journal of Econometrics – V. 147 – P. 258—265.
5. *Fabrice Talla Nobibon et al.,* Revealed preference tests of collectively rational consumption behavior: formulations and algorithms. – Preprint -2015.
6. *Klemashev N., Shaninin A.* Positively-homogeneous Konus-Divisia indices and their applications to demand analysis and forecasting . - arXiv: 1501.05771