УДК 51-77

Эволюционный вывод простейшей модели расщепления транспортных потоков на личный и общественный транспорт

А.В. Гасников, С.С. Омельченко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Для прояснения основной идеи рассмотрим максимально упрощенную ситуацию. Город состоит из двух районов: спального и рабочего. Каждый день жители города (все они живут в спальном районе, а работают, естественно, в рабочем) ездят на работу. Каждый из них имеет личный автомобиль. Кроме того, в городе имеется развитая система общественного транспорта. Таким образом, каждый житель имеет две альтернативы ездить на работу на личном транспорте и на общественном.

Ежедневные потери пользователей личного транспорта, оценивающих единицу (минуту) своего времени в $p \geq 1$ рублей, могут быть рассчитаны следующим образом

$$A_p(x) = a + pT(x),$$

где $a > 0$ – характеризует постоянные затраты (амортизационные издержки – износ транспортного средства, транспортный налог за пользование дорогами, затраты на бензин и т.п.), $x \in [0,1]$ – доля жителей города, использующих личный транспорт, $T(x)$ – функция, характеризующее то, как пользователи транспортной сети оценивают свои временные затраты. Обычно (см., например, [1]) $T(x)$ выбирают вида BPR-функций, т.е. $T(x) = T_0 + \gamma x^4$.

Ежедневные потери пользователей общественного транспорта, оценивающих единицу (минуту) своего времени в $p \geq 1$ рублей, могут быть рассчитаны следующим образом

$$B_p(x) \equiv b_1 + pb_2,$$

где $b_1 > 0$ – характеризует постоянные затраты (цена билета и т.п.), а $b_2 > 0$ можно понимать как время, потерянное в пути. В отличие от личного транспорта, для общественного транспорта считается, что b_2 не зависит от x (метро, электропоезда, выделенные полосы и т.п.).

Будем считать, что жителей в городе много. Они расслоены по тому, во сколько рублей каждый из них оценивает единицу своего времени (потерянного в пути). Обычно это колеблется от 1 руб/мин до 10 руб/мин. Введем зависимость $x(p)$ – доля жителей города, оценивающих 1 минуту своего времени не меньше чем в p рублей. Эта зависимость естественным образом восстанавливается из рангового закона распределения населения по доходу Ципфа–Парето [2]. Обычно эту зависимость считают степенной $x(p) = \chi p^{-\eta}$, где η выбирают из диапазона 1 – 2.

Представим себе такую динамику (повторяющуюся из дня в день). Каждый житель в $(k+1)$-й день смотрит на то, какая доля жителей x^k использовала личный транспорт в k-й день. Считаем, что такая информация (статистика) по вчерашнему дню общедоступна (например, благодаря каким-нибудь интернет сервисам, скажем, Яндекс.Пробки). Исходя из этой информации каждый житель, оценивающий минуту своего времени в p рублей, оценивает (экстраполируя ситуацию вчерашнего дня на день сегодняшний, за неимением точной информации о x^{k+1}) свои затраты от двух возможных альтернатив: $A_p(x^k)$ – личный транспорт и B_p – общественный транспорт. Мы считаем всех жителей рациональными, поэтому из двух альтернатив, каждый житель выбирает ту, которая приносит ему наименьшие затраты. Таким образом, происходит формирование x^{k+1}.

Определим зависимость $p(x)$, как корень уравнения $A_p(x) = B_p$, т.е.

$$p(x) = \frac{a - b_1}{b_2 - T(x)}.$$

Теорема 1. *Отображение $x(p(x))$ является сжимающим отображением отрезка* [0,1] *в себя. И как следствие итерационный процесс $x^{k+1} = x(p(x^k))$ сходится к неподвижной точке, которая всегда существует и единственна, со скоростью геометрической прогрессии ($x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$).*

Доказательство. Для доказательства сжимаемости воспользуемся теоремой Лагранжа о промежуточных значениях. Если для любого x из отрезка [0,1] значение [x(p(x))]' меньше 1, тогда отображение будет сжимающим по определению. Для данного отображения условие сжимаемости будет выглядеть так:

$$\frac{4\eta\chi\gamma}{a - b_1}\left(\frac{b_2 - T_0}{a - b_1}\right)^{\eta-1} < 1$$

При η = 1 оно переписывается в виде

$$\frac{4\chi\gamma}{a - b_1} < 1$$

А неподвижная точка может быть найдена из уравнения

$$\gamma\chi x^4 + (a - b_1)x - (b_2 - T_0)\chi = 0$$

Условия на коэффициенты, полученные из требования отображения отрезка в себя так:

$$\frac{b_2 - T_0}{\gamma} \geq 1, \qquad b_2 - T_0 \leq \frac{a - b_1}{\sqrt[\eta]{\chi}}$$

Литература

1. *Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нестеров Ю.Е, Шпирко С.В.* О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. 2014. Т. 26:6. С. 34–70. arXiv:1405.7630

2. *Гасников А.В., Гасникова Е.В.* Теория макросистем с точки зрения стохастической химической кинетики // Математическое моделирование. 2016. Т. 28.

3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.