УДК 537.84

Метод быстрых искажений для изучения магнитогидродинамической турбулентности астрофизической плазмы

С.И. Сафонов[1,2], *А.С. Петросян*[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Институт космических исследований РАН

Получены уравнения для спиральности и магнитной спиральности. Проведено их сравнение для случаев вращающейся и не вращающейся плазмы.

Работа посвящена исследованию характеристик турбулентного течения астрофизической плазмы в приближении магнитной гидродинамики методом быстрых искажений.

Теория быстрых искажений турбулентности является методом линейного анализа турбулентных течений, изменяющихся под действием крупномасштабных градиентов скорости потока, магнитного поля, массовых сил. Основное предположение этой теории состоит в том, что поле турбулентности реагирует на некоторый внешний эффект настолько быстро, что силы инерции, действующие на течение, не приводят к изменениям в распределении скоростей. Таким образом, предполагается, что реакция на этот внешний эффект происходит в интервале времени малом по сравнению со временем вырождения турбулентности. Это делает задачу линейной и позволяет записать замкнутые уравнения для вторых моментов турбулентного течения.

В работе теория быстрых искажений применяется для несжимаемых неоднородных магнитогидродинамических течений в случае вращающейся и не вращающейся астрофизической плазмы при наличии внешнего магнитного поля, искажаемой крупномасштабным линейным сдвигом скорости.

Система описывается следующей системой уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\
\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k = -\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + b_j \dfrac{\partial b_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 u_i \\
\dfrac{\partial b_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \eta \nabla^2 b_i
\end{cases}
$$

где $\tilde{p} = p + \frac{b^2}{2}$, Ω - вектор угловой скорости, ν, η – вязкость и магнитная вязкость.

Поле скорости, магнитное поле и давление представляются в виде суммы средней и флуктуирующей компонент $u_i = U_i + u_i',\ b_i = B_i + b_i',\ \tilde{p} = \tilde{P} + \tilde{p}'$. К уравнениям применяется операция усреднения по Рейнольдсу. В результате получаются системы уравнений для средних и флуктуаций.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \\
\dfrac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j U_k = -\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + B_j \dfrac{\partial B_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 U_i - \langle u_i' u_j' \rangle + \langle b_i' b_j' \rangle \\
\dfrac{\partial B_i}{\partial t} + U_j \dfrac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_j \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} = \eta \nabla^2 B_i - \langle u_j' b_i' \rangle + \langle u_i' b_j' \rangle
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \\
\dfrac{\partial u_i'}{\partial t} + U_j \dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k' = -\dfrac{\partial \tilde{p}'}{\partial x_i} + B_j \dfrac{\partial b_i'}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 u_i' + (NL)_u \\
\dfrac{\partial b_i'}{\partial t} + U_j \dfrac{\partial b_i'}{\partial x_j} - B_j \dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j} - b_j' \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} = \eta \nabla^2 b_i' + (NL)_b
\end{cases}
$$

$$
(NL)_u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_i' b_j' - u_i' u_j' + \langle u_i' u_j' \rangle - \langle b_i' b_j' \rangle\right)
$$

$$
(NL)_b = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i' b_j' - u_j' b_i' + \langle u_j' b_i' \rangle - \langle u_i' b_j' \rangle\right)
$$

На рассматриваемых временах нелинейными членами в полученных уравнениях для флуктуаций скорости и магнитного поля можно пренебречь.

При однородности начальной турбулентности, поля флуктуаций можно представить интегралом Фурье

$$
\hat{u}_i'(\boldsymbol{\chi}, t) = \int u_i'(\boldsymbol{x}, t) e^{-i\chi\cdot x} d\boldsymbol{x}
$$

и получить уравнения для Фурье-образов флуктуаций поля скорости и магнитного поля

$$\begin{cases} \dfrac{du_i'}{dt} = -M_{in}\lambda_{nl}u_l' - P_{in}\varepsilon_{nkl}\Omega_k u_l' + i\chi_l B_l b_i' - \nu\chi^2 u_i' \\ \dfrac{db_i'}{dt} = \lambda_{il}b_l' + i\chi_l B_l u_i' - \eta\chi^2 b_i' \end{cases}$$

где $P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\chi_i\chi_j}{\chi^2}$, $M_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2\chi_i\chi_j}{\chi^2}$

Для сохранения однородности уравнений волновой вектор должен изменяться по закону

$$\frac{d\chi_i}{dt} = -\lambda_{ji}\chi_j$$

Таким образом получена замкнутая система уравнений, позволяющая по известным начальным условиям рассчитать значения флуктуаций поля скорости и напряженности магнитного поля в любой точке пространства для любого момента времени.

Для однородной турбулентности вторые моменты могут быть получены из спектральных тензоров поля скорости $\Phi_{ij} = \langle u_i' u_j' \rangle$, магнитного поля $\Phi_{ij}^b = \langle b_i' b_j' \rangle$ и перекрестной спиральности $\mathrm{H}_{ij}^{\mathrm{cross}} = \langle u_i' b_j' \rangle$. Уравнения для изменения спектрального тензора во времени могут быть получены из уравнений для флуктуаций.

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = -M_{in}\lambda_{nl}\Phi_{lj} - M_{jn}\lambda_{nl}\Phi_{li} - P_{in}\varepsilon_{nkl}\Omega_k\Phi_{lj} - P_{jn}\varepsilon_{nkl}\Omega_k\Phi_{li} + i\chi_l B_l\left(H_{ij}^{cross} + H_{ji}^{cross}\right) - 2\nu\chi^2\Phi_{ij}$$

$$\frac{d\Phi_{ij}^{\mathrm{b}}}{dt} = \lambda_{il}\Phi_{lj}^{\mathrm{b}} + \lambda_{jl}\Phi_{li}^{\mathrm{b}} + i\chi_l B_l\left(H_{ij}^{cross} + H_{ji}^{cross}\right) - 2\nu\chi^2\Phi_{ij}^{\mathrm{b}}$$

$$\frac{d\mathrm{H}_{ij}^{\mathrm{cross}}}{dt} = -M_{in}\lambda_{nl}\mathrm{H}_{lj}^{\mathrm{cross}} + \lambda_{jl}\mathrm{H}_{il}^{\mathrm{cross}} - P_{in}\varepsilon_{nkl}\Omega_k\mathrm{H}_{lj}^{\mathrm{cross}} + i\chi_l B_l\left(\Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{\mathrm{b}}\right) - (\nu + \eta)\chi^2\mathrm{H}_{ij}^{\mathrm{cross}}$$

Кинетическая энергия

$$\frac{d\Phi_{ii}}{dt} = -2M_{in}\lambda_{nl}\Phi_{li} - 2P_{in}\varepsilon_{nkl}\Omega_k\Phi_{li} + 2i\chi_l B_l H_{ii}^{cross} - 2\nu\chi^2\Phi_{ii}$$

Магнитная энергия

$$\frac{d\Phi_{ii}^{\mathrm{b}}}{dt} = 2\lambda_{il}\Phi_{li}^{\mathrm{b}} + 2i\chi_l B_l H_{ii}^{cross} - 2\nu\chi^2\Phi_{ii}^{\mathrm{b}}$$

Спиральность $H = \langle \boldsymbol{u} \cdot rot\, \boldsymbol{u} \rangle$

$$\frac{dH}{dt} = -i\varepsilon_{ijm}\lambda_{il}\chi_j\Phi_{lm} - i\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ikl}\Omega_k\chi_j\Phi_{lm} - 2\varepsilon_{ijk}k_jk_lB_l\mathrm{H}_{ki}^{\mathrm{cross}} - i\varepsilon_{ijm}\lambda_{lj}\chi_l\Phi_{im}$$
$$- i\varepsilon_{ijm}\lambda_{ml}\chi_j\Phi_{il} + i\chi_l\Omega_l\Phi_{ii} - 2\nu k\chi^2H$$

Перекрестная спиральность $H^{cross} = \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} \rangle$

$$\frac{dH^{cross}}{dt} = -M_{in}\lambda_{nl}\mathrm{H}_{li}^{\mathrm{cross}} + \lambda_{il}\mathrm{H}_{il}^{\mathrm{cross}} - P_{in}\varepsilon_{nkl}\Omega_k\mathrm{H}_{li}^{\mathrm{cross}} + i\chi_lB_l\left(\Phi_{ii} + \Phi_{ii}^{\mathrm{b}}\right) - (\nu + \eta)\chi^2H^{cross}$$

Токовая спиральность $H^j = \langle \boldsymbol{b} \cdot rot\ \boldsymbol{b} \rangle$

$$\frac{dH^j}{dt} = i\varepsilon_{ijk}\chi_j\lambda_{il}\Phi_{lk}^b + i\varepsilon_{ijk}\chi_j\lambda_{kl}\Phi_{li}^b - \varepsilon_{ijk}\chi_j\chi_lB_l(\mathrm{H}_{ik}^{\mathrm{cross}} + \mathrm{H}_{ki}^{\mathrm{cross}}) - 2\eta\chi^2H^j$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Batchelor G.K.* 1953. The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press
2. *Hunt J.C.R, Carruthers D.J.* Rapid distortion theory and the “problems” of turbulence, J. Fluid Mech., 1990, 212:497–532