УДК 519.63

Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с клином методом декартовых сеток

Д.А. Сидоренко, П.С. Уткин

Институт автоматизации проектирования РАН

Ряд задач теории ударных и детонационных волн связан с необходимостью численного интегрирования уравнений газовой динамики в областях сложной формы с криволинейными границами. Целью работы является разработка, программная реализация и количественная оценка свойств вычислительного алгоритма метода декартовых сеток [1].

Математическая модель основывается на двумерной системе уравнений Эйлера, записанной в декартовой системе координат (x, y) в векторной дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u\left(e+p\right) \end{bmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v\left(e+p\right) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Здесь и далее используются общепринятые в вычислительной механике обозначения. Разностная схема для аппроксимации (1) записывается в конечно-объемном виде:

$$\frac{\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{U}_{i,j}^{n}}{\Delta t^n} + \frac{1}{S_{i,j}} \sum_{\sigma} \left(\mathbf{F}_\sigma l_\sigma \right) = 0, \tag{2}$$

где индекс i соответствует номеру расчетной ячейки вдоль координатного направления x, индекс j – вдоль направления y, суммирование ведется по всем ребрам σ ячейки (i, j), l_σ – длина ребра с индексом σ, $\mathbf{F}_\sigma$ – вектор численного потока через ребро σ в направлении внешней нормали. Основной особенностью методики является тот факт, что расширенная расчетная область представляет собой прямоугольник, покрытый равномерной сеткой с квадратными ячейками, часть из которых пересекается криволинейной границей основной расчетной области. Таким образом, все ячейки подразделяются на внутренние (лежащие внутри основной расчетной области), пересекаемые и внешние, а ребра ячеек – на регулярные и усеченные. Потоки через регулярные ребра рассчитываются стандартным методом Годунова. Расчет потоков через усеченные ребра требует введения в рассмотрение вспомогательных геометрических объектов – «h-ячеек». H-ячейки – это параллелограммы, имеющие своими основаниями ребра усеченной ячейки, и построенные в каждом из четырех направлений, определяемых ориентацией граничного ребра ячейки (два перпендикулярных направления и два продольных). Потоки через усеченные ребра находятся с помощью решения задач Римана с начальными данными в виде параметров газа в h-ячейках методом Годунова. Вектор консервативных переменных в h-ячейке определяется как среднее арифметическое взвешенное по всем векторам в ячейках сетки, которые h-ячейка пересекает, с весом, равным площади пересечения.

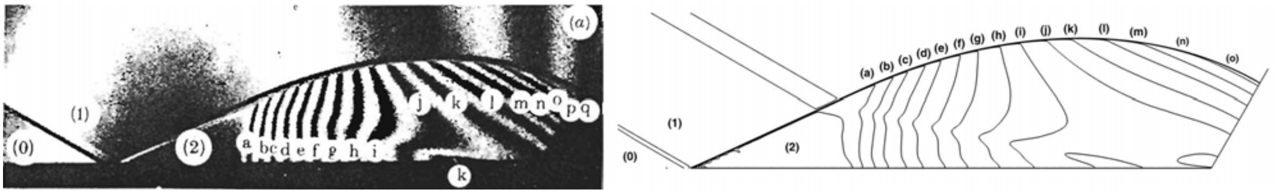

Рис. 1. Экспериментальный снимок из [2], полученный методом интерферометрии (левый рисунок), и рассчитанные изолинии плотности, соответствующие изозначениям из опыта (правый рисунок).

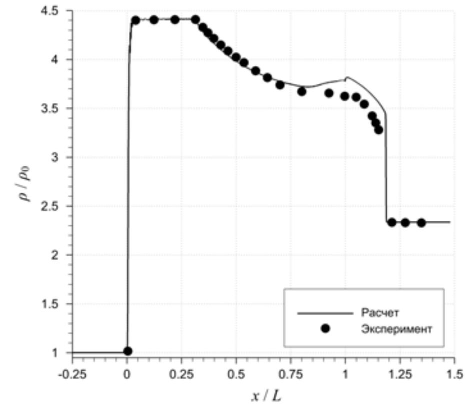

Рис. 2. Кривая относительной плотности газа (ρ_0 – плотность перед УВ) вдоль стенки; x – координата вдоль стенки, отсчитываемая от текущего положения УВ; L – расстояние от текущего положения УВ до основания клина.

Реализация вычислительного алгоритма была верифицирована на задаче об отражении ударной волны (УВ) от клина [2]. Число Маха падающей волны 2.05, угол наклона клина 60°. В начальный момент времени расчетная область заполнена покоящимся аргоном с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Расчет проводился на сетке с числом ячеек 2000 × 2000. Качественное и количественное сравнение рассчитанной ударно-волновой картины регулярного маховского отражения с данными опыта [2] представлено на рис. 1 и 2.

Литература

1. *Berger M., Helzel C.* A simplified h-box method for embedded boundary grids // SIAM J. Sci. Comput. – 2012. – V. 34, No. 2. – P. A861–A888.
2. *Glaz H.M., Colella P., Glass I.I., Deschambault R.L.* A numerical study of oblique shock-wave reflections with experimental comparisons // Proceedings of the Royal Society of London A. – 1985. – V. 398. – P. 117–140.